А. Н. Ляпунов (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Равновесные решения для вогнутых многокритериальных задач.**

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклый телесный компакт, $f\colon X \to \mathbf{R}^m$ — набор критериев. Совокупность $\mathcal{P} = (X, f)$ называется *многокритериальной задачей* или просто *задачей.* В [1]–[3] было определено *равновесное решение* задачи. В работе, представленной данным сообщением, исследуется равновесное решение в случае вогнутых критериев.

Равновесное решение состоит в следующем. Для $n = 1$ $X = [\alpha, \beta]$. Решение $x^* = s(\mathcal{P})$ определяется уравнением

$$\int_\alpha^{x^*} |\, f'(x) \,|\, dx = \int_\alpha^\beta \|(f'(x))^+\|\, dx. \tag{1}$$

В [1]–[3] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет единственное решение* x^*.

Теорема 2. *Если в задаче* $\mathcal{P}$ *критерии* f_i $(i = 1, \dots, m)$ — *вогнутые функции, то решение* x^* *уравнения* (1) *Парето-оптимально.*

Пусть теперь n произвольно. Для $x \in \mathbf{R}^n$ будем писать $x = (x_j, x_{-j})$, где x_j — j-я компонента x, а x_{-j} — совокупность остальных компонент. Для $x \in X$ положим $a_j(x_{-j}) = \min\{x_j\colon\ (x_j, x_{-j}) \in X\}$, $b_j(x_{-j}) = \max\{x_j\colon\ (x_j, x_{-j}) \in X\}$. Решение $x^* = s(\mathcal{P})$ определяется из системы

$$\int_{a_j(x^*_{-j})}^{x_j^*} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x^*_{-j}) \right\| dx_j = \int_{a_j(x^*_{-j})}^{b_j(x^*_{-j})} \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_{-j}) \right)^+ \right\| dx_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

В [1]–[3] доказана следующая теорема существования.

Теорема 3. *Пусть* $X \subset \mathbf{R}^n$ — *выпуклый телесный компакт, а функции* f *непрерывно дифференцируемы. Тогда система* (2) *имеет решение* $x^* \in X$.

Рассмотрим задачу $\mathcal{P} = (X, f)$, в которой $X = \mathbf{R}^n$, а критерии $f_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $i = 1, \dots, m$, являются строго вогнутыми функциями, имеющими максимум.

Будем считать, что в формулах (1) и (2) используется норма в l_1.

Случай $n = 1$. Уравнение (1) переходит в уравнение

$$\sum_{i=1}^m (\max_x f_i(x) - f_i(x^*)) \operatorname{sign} f_i'(x^*) = 0.$$

Общий случай. Система (2) переходит в систему

$$\sum_{i=1}^m (\max_{x_j} f_i(x_j, x^*_{-j}) - f_i(x^*)) \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Получены также условия Парето-оптимальности решения системы (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А. Н.* Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах. — Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. IV, ч. 1. СПб: Сборник трудов СПбЭМИ РАН, 2005, с. 92–110.
2. *Ляпунов А. Н.* Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах. — Дискретный анализ и исследование операций, серия 1, 2007, т. 14, № 4, с. 27–42.
3. *Liapounov A. N.* Game-theoretic approach to multicriteria problems. — Contributions to GTM2007, St. Petersburg, 2007, p. 294–314.