О. В. Назарько (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Сильные деформации на нерегулярных финансовых рынках относительно специальной хааровской фильтрации.**

Рассмотрим фильтрованное пространство $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathcal{F})$, где $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_N, B_N\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{A_1, A_2, \ldots, A_n, B_n\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Фильтрация $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ называется *специальной хааровской фильтрацией.* На этом фильтрованном пространстве определим дисконтированный (B,S)-рынок с акцией одного типа, цену которой в момент времени n запишем в виде $S_n = \sum_{k=1}^n a_n^{(k)} I_{A_k} + b_n I_{B_n}$.

Этот рынок может быть нерегулярным в смысле [1], т.е. равенства $a_n^{(k)} = a_{n+1}^{(k)} = \cdots = a_N^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ могут не выполняться. Это означает, что если на этом фильтрованном пространстве рассмотреть вероятностную меру P, нагружающую все атомы σ-алгебры $\mathcal{F}_N$, то данный рынок будет арбитражным. Мы будем рассматривать данное фильтрованное пространство без исторической вероятности.

Для всякого n зададим на $\mathcal{F}_n$ вероятностную меру $Q^{(n)}$. Будем считать, что для любого $n = 1, 2, \ldots, N$: $Q^{(n)}(A_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Естественность этого предположения будет следовать из того, что мы рассматриваем нерегулярные рынки. Обозначим $Q^{(n)}(B_n) = q_n$, $Q^{(n)}(A_n) = 1 - q_n$ $(0 < q_n < 1)$. Следуя терминологии [2]–[3], семейство мер $\mathbf{Q} = (Q^{(n0})_{n=0}^N$ представляет собой сильную деформацию исходного фильтрованного пространства. Множество всех таких деформаций обозначим Q. Очевидно, что множество Q можно отождествить с открытым N-мерным кубом $(0,1)^N$. Ясно, что множество Q не содержит мартингальных мер.

Пусть $\mathbf{R} \in \mathrm{Q}$ — какая-либо другая деформация. Если $\mathbf{R} \sim \mathbf{Q}$ (в смысле [2]–[3]), то легко видеть, что $\mathbf{R} = \mathbf{Q}$.

Предложение 1. *Для того чтобы для данного (B,S)-рынка существовала мартингальная деформация из Q (в смысле [2]–[3]), необходимо и достаточно, чтобы для любого $n = 0, 1, \ldots, N-1$ выполнялось одно из следующих условий*:

$$b_{n+1} > b_n > a_{n+1}^{(n+1)}, \tag{1}$$

$$b_{n+1} < b_n < a_{n+1}^{(n+1)}, \tag{2}$$

$$b_{n+1} = b_n = a_{n+1}^{(n+1)}. \tag{3}$$

Для того чтобы существовала единственная мартингальная деформация из Q, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n = 0, 1, \ldots, N-1$ выполнялось одно из условий (1) *или* (2).

Предположим, что выполняются условия существования и единственности мартингальной деформации, обозначим $\mathbf{Q}$ эту единственную мартингальную деформацию. Пусть f_N — произвольное платежное обязательство. Образуем адаптированную последовательность случайных величин $(X_n)_{n=0}^N$:

$$
\begin{aligned}
&X_N := f_N = \sum_{k=1}^N f_N^{(k)} I_{A_k} + f_N^{(N+1)} I_{B_N},\\
&f^{(N-1)} = E^{Q^{(N)}}[X_N],\\
&X_{N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} f_N^{(k)} I_{A_k} + f^{(N-1)} I_{B_{N-1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(n)} = E^{Q^{(n+1)}}[X_{n+1}],\\
&X_n = \sum_{k=1}^n f_N^{(k)} I_{A_k} + f^{(n)} I_{B_n},
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0 = E^{Q^{(1)}}[X_1]. \end{array}$$

Вычисляем всевозможные портфели $(\beta_n, \gamma_n)_{n=1}^N$, удовлетворяющие соотношениям $\beta_n + \gamma_n S_n = X_n \quad (n = 1, 2, \dots, N)$. Ясно, что все такие портфели реплицируют платежное обязательство f_N, с. в. X_n являются их полными капиталами в момент времени n, а величина X_0 — «справедливой» ценой данного платежного обязательства.

Описанные выше действия назовем *совершенным хеджированием* относительно мартингальной деформации $\mathbf{Q}$. Совершенное хеджирование всюду на Ω определяется обычным образом.

Предложение 2. *Совершенные самофинансируемые хеджи (в смысле «всюду на Ω») входят в множество совершенных хеджей относительно единственной мартингальной деформации Q.*

З а м е ч а н и е. Канонический самофинансируемый хедж, т. е. хедж, удовлетворяющий условиям $\gamma_n(A_k) = 0$, $\forall n = 2, \dots, N$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, всегда существует (всюду на Ω) и единственен.

С вычислительной точки зрения, процесс хеджирования относительно мартингальной деформации более прост, чем процесс хеджирования всюду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волосатова Т. А.*, *Павлов И. В.* Об интерполяции финансовых рынков, включая арбитражные. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 458–467.
2. *Назарько О. В.* О (B, S)-рынках на деформированных стохастичеких базисах. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 6, с. 1038–1039.
3. *Назарько О. В.* (B, S)-рынки на деформированных стохастичеких базисах. — Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. естеств. науки, 2008, в. 3, с. 19–21.