Э. Л. Пресман (Москва, ЦЭМИ РАН). **Пример задачи оптимальной остановки последовательности случайных величин, заданных на цепи Маркова.**

Рассмотрим однородную по времени марковскую цепь $U = \{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ с двумя состояниями 1 и 2. Заданы вероятности p_i того, что цепь останется в состоянии i, так что вероятности перехода из состояния i в состояние $3-i$ равны $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2$. Если цепь U находится в состоянии 1, то подбрасывается правильная кость, так что распределение $F(1, \cdot)$ заданной на цепи случайной величины Y_n сосредоточено с равными вероятностями в точках $1, 2, 3, 4, 5, 6$, а если цепь U находится в состоянии 2, то подбрасывается правильный тетраэдр, так что соответствующее распределение $F(2, \cdot)$ сосредоточено с равными вероятностями в точках $1, 2, 3, 4$. Требуется найти момент остановки τ, который максимизирует при каждом $i = 1, 2$ величину $\mathbf{E}\,[\beta^{\tau} Y_{\tau} | U_0 = i]$, где β — параметр дисконтирования. Эта задача рассматривалась в [1] в рамках общей задачи оптимальной остановки последовательности случайных величин, заданных на конечной цепи Маркова. В [1] указан алгоритм нахождения множества остановки и цены игры и приведены примеры вычислений для некоторых конкретных значений β и p_i, $i = 1, 2$. Здесь мы исследуем зависимость множества остановки от β.

Для целых чисел k_1, k_2, $0 \leqslant k_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 4$, положим $D(k_1, k_2) = \{z = (i, j)\colon i = 1,\ k_1 < j \leqslant 6;\ i = 2,\ k_2 < j \leqslant 4\}$. Очевидно, что при β, близких к нулю, оптимально останавливаться после первого же подбрасывания, так что множество остановки при малых β совпадает с $D(0, 0)$. Мы показываем, что с ростом β множество остановки получается из $D(0, 0)$ попеременным увеличением на единицу k_1 и k_2, при этом, если $p_1 > q_2$, то начинать надо с k_1, если $p_1 < q_2$, то начинать надо с k_2, а если $p_1 = q_2$, то k_1 и k_2 увеличиваются одновременно. Приведем более точную формулировку.

В [1] показано, что выигрыш от остановки в момент первого после нуля попадания пары (U_n, Y_n) в множество $D(k_1, k_2)$ в случаях $U_0 = 1$ и $U_0 = 2$ равен соответственно

$$d_1(k_1, k_2, \beta) = \frac{\beta}{\gamma}\biggl(2{,}5 - a_{k_2} + p_1(1 + a_{k_2} - a_{k_1}) + \beta(q_2 - p_1)\frac{k_2}{4}(3{,}5 - a_{k_1})\biggr), \quad (1)$$

$$d_2(k_1, k_2, \beta) = \frac{\beta}{\gamma}\biggl(2{,}5 - a_{k_2} + q_2(1 + a_{k_2} - a_{k_1}) + \beta(q_2 - p_1)\frac{k_1}{6}(2{,}5 - a_{k_2})\biggr), \quad (2)$$

где $\gamma \equiv \gamma(k_1, k_2) = 1 - \beta(p_1 k_1/6 + p_2 k_2/4) + \beta^2(p_1 - q_2)k_1 k_2/24$, $a_{k_1} = k_1(k_1+1)/12$, $a_{k_2} = k_2(k_2+1)/8$. Положим $\beta^{(0)} = 0$, $\beta^{(10)} = 1$.

Если $p_1 > q_2$, то выберем числа $\beta^{(2k-1)}$ из условия $d_1(k-1, k-1, \beta^{(2k-1)}) = k$, $1 \leqslant k \leqslant 5$, а числа $\beta^{(2k)}$ из условия $d_2(k, k-1, \beta^{(2k)}) = k$, $1 \leqslant k \leqslant 4$. Мы показывем, что множество остановки D^* имеет следующий вид: если $\beta \in (\beta^{(2k)}, \beta^{(2k+1)}]$, $0 \leqslant k \leqslant 4$, то $D^* = D(k, k)$, а если $\beta \in (\beta^{(2k+1)}, \beta^{(2k+2)}]$, $0 \leqslant k \leqslant 4$, то $D^* = D(k+1, k)$.

Если $p_1 < q_2$, то выберем числа $\beta^{(2k-1)}$ из условия $d_2(k-1, k-1, \beta^{(2k-1)}) = k$, $1 \leqslant k \leqslant 5$, а числа $\beta^{(2k)}$ из условия $d_1(k-1, k, \beta^{(2k)}) = k$, $1 \leqslant k \leqslant 4$. В этом случае множество остановки D^* имеет следующий вид: если $\beta \in (\beta^{(2k)}, \beta^{(2k+1)}]$, $0 \leqslant k \leqq 4$, то $D^* = D(k, k)$, а если $\beta \in (\beta^{(2k+1)}, \beta^{(2k+2)}]$, $0 \leqslant k \leqslant 4$, то $D^* = D(k, k+1)$.

Если $p_1 = q_2$, то $d_1(k_1, k_2, \beta) = d_2(k_1, k_2, \beta)$ и числа $\beta^{(2k)}$ выберем из условия $d_1(k-1, k-1, \beta^{(2k)}) = k$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, и число $\beta^{(9)}$ из условия $d_1(5, 4, \beta^{(9)}) = 5$. В этом случае множество остановки D^* имеет вид: если $\beta \in (\beta^{(2k)}, \beta^{(2k+2)}]$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, то $D^* = D(k, k)$, если $\beta \in (\beta^{(8)}, \beta^{(9)}]$, то $D^* = D(4, 4)$, а если $\beta \in (\beta^{(9)}, 1]$, то $D^* = D(5, 4)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07–01–00541.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сонин И. М.*, *Пресман Э. Л.* Об одной задаче оптимальной остановки для случайных величин, заданных на цепи Маркова. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).