А. Ф. Р о н ж и н, В. Н. С у р и к о в (Москва, ТВП)**. Линейные разделимые статистики и процессы восстановления, связанные с обобщением «задачи о ключах».**

Рассмотрим серии последовательностей независимых полиномиальных испытаний

$$X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

с множеством исходов $\{1, \ldots, n\}$ и вероятностями $\mathbf{P}\{X_i^{(n)} = \nu\} = p_\nu^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, \ldots, n$. Для каждой серии образуем случайные последовательности

$$L_n^{(0)} = 0, \quad L_n^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} \nu h_\nu^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} X_i^{(n)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

в которых $h_\nu^{(k)} = \sum_{i=1}^k \mathbf{I}\{X_i^{(n)} = \nu\}$ — частота исхода ν в первых k испытаниях последовательности (1), и определим случайный процесс $\nu_n(t) = \max\{k\colon L_n^{(k)} \leqslant nt\}$, $t > 0$.

При помощи результатов из [1] доказано утверждение.

Теорема. *Пусть при* $n \to \infty$*функции*

$$F_n(x) = 0, \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{n}, \quad F_n(x) = \sum_{\nu \leqslant nx} p_\nu^{(n)}, \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1,$$

сходятся на отрезке $[0,1]$ *равномерно к непрерывной функции* $F(x)$*. Тогда конечномерные распределения процесса* $\nu_n(t)$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса восстановления* $\nu(t) = \max\{k\colon X_0 + \cdots + X_k \leqslant t\}$, $t \geqslant 0$, *в котором* $X_0 = 0$, *а* $X_1, X_2, \ldots$ *— независимые случайные величины (с. в.) с функцией распределения* $F(x)$*.*

З а м е ч а н и е 1. Пусть в «задаче о ключах» [1] в связке имеется $n + m - 1$ ключей, из которых к каждой двери подходит m ключей. Тогда число попыток для первого успешного открытия двери $X_1^{(n)}$ будет иметь распределение

$$\mathbf{P}\{X_1^{(n)} = \nu\} = \binom{n+m-1-\nu}{m-1}\binom{n+m-1}{m}^{-1}.$$

В этом случае предельной для $F_n(x)$ будет функция распределения минимума m независимых равномерно-распределенных на отрезке $[0,1]$ с. в., которая имеет плотность $m(1-x)^{m-1}$ (бета-распределение с параметрами $(1,m)$). Факториальные моменты с. в. $n - X_1^{(n)}$ и дисперсия в этом случае равны

$$\mathbf{M}\,(n - X_1^{(n)})^{[k]} = \frac{m}{m+k}(n-1)^{[k]}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \mathbf{D}\,X_1^{(n)} = \frac{m(n-1)(n+m)}{(m+1)^2(m+2)}.$$

З а м е ч а н и е 2. С. в. $L_n^{(k)}$ является линейной разделимой статистикой. Из теоремы 10 [2] следует, что при $n, k \to \infty$ в условиях замечания 1 распределение с. в. $(k\mathbf{D}\,X_1^{(n)})^{-1/2}(L_n^{(k)} - \mathbf{M}\,kX_1^{(n)})$ слабо сходится к распределению с. в., имеющей математическое ожидание 0 и дисперсию 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суриков В. Н.* Задача о ключах. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 3.
2. *Медведев Ю. И.* Разделимые статистики в полиномиальной схеме. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXV, в. 2, с. 3–17.