Е. И. Улитина (Сочи, СГУТиКД). **Нестационарные периоды занятости в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета.**

Модель $M_r|G_r|1|\infty$. В одноканальную систему обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, …, r-вызовов с параметрами $a_1,\ldots,a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы, не зависят от процесса поступления и для k-вызовов имеют функцию распределения $B_k(x)$, $B_k(+0)=0$.

Интересна дисциплина с зависящими от времени приоритетами. Поступивший в момент $\tau>0$ в модель k-вызов, $k=1,2,\ldots,r$, в момент $t>\tau$ получает приоритет $b_k(t-\tau)^\gamma$, $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_r\geqslant 0$, $\gamma>0$. Прерывания обслуживания не допускаются. В момент завершения обслуживания из очереди на прибор выбирается вызов с наибольшим приоритетом. «Крайними» случаями служат дисциплины $FIFO$ и относительных приоритетов с дисциплиной $FIFO$ внутри потоков.

Модель $M_r|G_r|1|\infty$ с рассмотренной дисциплиной называют *моделью Клейнрока.*

Обозначим $T_k(u)$ период занятости $1,\ldots,k$-вызовов с задержкой со скоростью роста приоритета b_{k+1}.

Пусть $\pi_k(s)$, $(k=1,2,\ldots,r,\ s\geqslant 0)$ — минимальный по абсолютному значению корень среди корней $x=x(s)$ функционального уравнения $\sigma_k x=\sum_{i=1}^k a_{ik}\beta_i(s+\sigma_k-\sigma_k x)$, где $a_{ik}=a_i(1-(b_{k+1}/b_i)^{1/\gamma})$, $i=1,2,\ldots,k$, $\sigma_k=a_{1k}+a_{2k}+\cdots+a_{kk}$, $b_{r+1}=0$, $\beta_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dB_k(x)$, $s\geqslant 0$.

При $k=1,2,\ldots,r$, $i=1,2,\ldots,k$, $s\geqslant 0$ положим $m_k(s)=s+\sigma_k-\sigma_k\pi_k(s)$, $\pi_{ik}(s)=\beta_i(m_k(s))$ и введем в рассмотрение функции $y_k(s)=s+\sum_{i=1}^{k-1}(a_{ik}-a_{ik-1})(1-\pi_{ik}(s))+a_{kk}(1-\pi_{kk}(s))$.

Теорема. *При любых* $s_1\geqslant 0,\ \ldots,\ s_r\geqslant 0$ *и* $0=u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_{r-1}$ *справедливо равенство* $\mathbf{E}\exp\{-\sum_{i=1}^{r-1}s_iT_i(u_i)\}=\prod_{n=1}^{r-1}\exp\{-m_n(s_n+y_{n+1}(s_{n+1}+\cdots y_{r-1}(s_{r-1})\ldots))(u_n-u_{n-1})\}$, *где* $\mathbf{E}$ *— знак математического ожидания.*

Главная характеристика параметрических дисциплин в информационно-вычислительных системах — «время реакции». В математических моделях ее аналогом может служить виртуальное время ожидания $w_k(t)$, $k=1,2,\ldots,r$, $t\geqslant 0$, k-вызова в момент t.

Пусть $v_k(t)$, $k=1,\ldots,r$, $t>0$, есть $w_k(t)$ без времен обслуживания тех $1,\ldots,k-1$-вызовов, которые поступили в модель после момента t и обслужены до момента $t+w_k(t)$.

Для траекторий процесса $\{v_1(t),\ldots,v_r(t)):\ t\geqslant 0\}$ справедливы неравенства $v_1(t)\leqslant\cdots\leqslant v_r(t)$, $t\geqslant 0$, и справедливо равенство

$$(w_1(t),w_2(t),\ldots,w_r(t))\stackrel{d}{=}(v_1,T_1(v_2(t)),\ldots,T_{r-1}(v_r(t))),\qquad t\geqslant 0,\tag{1}$$

где при каждом $k=1,2,\ldots,r$ процессы $T_{k-1}(\cdot)$ и $v_k(t)$ независимы. Символ d указывает на совпадение функции распределения обеих частей случайного равенства.

При $n=1,2,\ldots,r-1$ и $s_n\geqslant 0$ обозначим $\lambda_r(s_r)=m_{r-1}(s_r)$, $\lambda_n(s_n,\ldots,s_r)=m_{n-1}(s_{n-1}+y_{n-1}(s_n+\cdots y_{r-1}(s_r)\ldots))-m_n(s_n+y_n(s_{n+1}+\cdots y_{r-1}(s_r)\ldots))$, $m_0(s)=s$, $s\geqslant 0$.

Из (1) и теоремы выводится *ключевое уравнение*: *при любых* $s_1\geqslant 0,\ \ldots,\ s_r\geqslant 0$ *и* $t\geqslant 0$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{E}\Big\{-\sum_{i=1}^r s_iw_i(t)\Big\}=\mathbf{E}\exp\Big\{-\sum_{i=1}^r\lambda_i(s_i,\ldots,s_r)v_i(t)\Big\}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09–01–90700-моб_ст.