С. А. Хихол (Москва, МГУ). **Два представления для обобщенного процесса плотности распределений семимартингалов с независимыми приращениями.**

Для двух семимартингалов с независимыми приращениями хорошо известно выражение для процесса плотности их распределений в случае, когда одно из них локально абсолютно непрерывно относительно другого [1, теорема III.5.35]. Известна также формула для обобщенного процесса плотности распределений процессов Леви без требования о локальной абсолютной непрерывности (см. [2, (3.32)]). Автором получена обобщающая упомянутые результаты формула для (обобщенного) процесса плотности распределений двух произвольных семимартингалов с независимыми приращениями.

Пусть $\Omega = \mathbf{D}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ — пространство всех непрерывных справа, имеющих пределы слева функций $\omega : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$, X — канонический процесс, μ — мера скачков процесса X, фильтрация $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ порождена X, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. Пусть на $(\Omega, \mathcal{F})$ заданы две вероятностные меры P и P', по которым процесс X является семимартингалом с независимыми приращениями, $X_0 = 0$ P- и P'-п. н.

Фиксируем функцию урезания $h : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$. Детерминированные версии триплетов X относительно P и P' обозначим соответственно $T = (B, C, \nu)$ и $T' = (B', C', \nu')$. Свяжем с этими триплетами несколько детерминированных объектов. Пусть λ — такая мера на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$, что $(|x|^2 \wedge 1) * \lambda_t < \infty$ для всех $t < \infty$ и $\nu \ll \lambda$, $\nu' \ll \lambda$. Положим $U = d\nu/d\lambda$, $U' = d\nu'/d\lambda$.

Существует единственное разложение $\nu' = \nu'_1 + \nu'_2$, где $\nu'_1 \ll \nu$ и $\nu'_2 \perp \nu$. Пусть $Y = d\nu'_1/d\nu$. Положим также $a_t = \nu(\{t\} \times \mathbf{R}^d)$, $a'_t = \nu'(\{t\} \times \mathbf{R}^d)$, $a'_{i,t} = \nu'_i(\{t\} \times \mathbf{R}^d)$, $i = 1, 2$.

Из критерия сингулярности распределений семимартингалов с независимыми приращениями [1, теорема IV.4.33] несложно показать существование такого $\sigma \in [0, +\infty]$, что $P_t \perp P'_t$ тогда и только тогда, когда $t \geqslant \sigma$, где P_t и P'_t есть сужения P и P' соответственно на $\mathcal{F}_t$; более того, σ явно выражается через триплеты T и T'. Из того же критерия вытекает существование такой измеримой функции $\beta : [0, \sigma) \to \mathbf{R}^d$, что $B' = B + h(x)(U' - U) * \lambda + (c\beta) \cdot A$ на $[0, \sigma)$. Здесь A_t — непрерывная возрастающая функция, а c_t — функция со значениями в множестве симметрических неотрицательно определенных матриц размера $d \times d$ такие, что $C = c \cdot A$.

Под *обобщенным процессом плотности* меры P' относительно P будем понимать такой (единственный с точностью до P-неразличимости) согласованный P-п. н. непрерывный справа и имеющий пределы слева случайный процесс $Z = (Z_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ со значениями в $\mathbf{R}_+$, что для любого $t \in \mathbf{R}_+$ случайная величина Z_t есть плотность абсолютно непрерывной компоненты P'_t относительно P_t.

Теорема. *Обобщенный процесс плотности Z меры P' относительно P имеет следующий вид*: $Z = \mathcal{E}(N)\, D\, 1_{[\![0,\sigma[\![} = \mathcal{E}(N - \Psi)\, 1_{[\![0,\sigma[\![}$ *P-п. н., где*

$$N_t = \beta \cdot X^c_t + \left(Y - 1 + \frac{a'_1 - a}{1 - a} 1_{\{a<1\}}\right) * (\mu - \nu)_t,$$

$$D_t = \exp(-K_t) \prod_{\substack{s\leqslant t\\ a_s<1\\ \Delta X_s=0\\ a'_{1,s}<1}} \frac{1 - a'_s}{1 - a'_{1,s}} \prod_{\substack{s\leqslant t\\ a_s=1\\ Y_s>0}} \frac{Y_s}{1 + Y_s - a'_{1,s}},$$

$$\Psi_t = \sum_{\substack{s\leqslant t\\ a_s<1\\ \Delta X_s=0}} \frac{a'_{2,s}}{1 - a_s} + \sum_{\substack{s\leqslant t\\ a_s=1}} (1 - a'_{1,s}) + K_t, \quad K_t = \nu'_2(\{s \leqslant t : a_s = a'_s = 0\} \times \mathbf{R}^d).$$

В случае $P' \overset{loc}{\ll} P$ имеем $\sigma = \infty$, $\nu' \ll \nu$ и $a'_t = 1$ если $a_t = 1$, поэтому $D \equiv 1, \Psi \equiv 0$

и формула для Z сводится к известной формуле III.5.21 из [1], а в случае, когда P и P' — распределения процессов Леви, $a_t = a'_t = 0$, $D_t = \exp(-K_t)$, $\Psi_t = K_t$ и сводится к формуле (3.32) из [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жакод Ж.*, *Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994.
2. *Sato K.* Density Transformation in Lévy Processes. Lecture notes for “Concentrated Advanced Course on Lévy Processes”. MaPhySto, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, 2000. http://www.maphysto.dk/publications/MPS-LN/2000/7.pdf