С. П. Горшков (Москва, ТВП). **Уточнение числа биюнктивных функций.**

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется *биюнктивной*, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде следующей конъюнктивной нормальной формы

$$f = \Big(\bigwedge_{i=1}^{p} x_{s_i}^{\alpha_i} \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{q} \Big(x_{s_{j1}}^{\beta_{j1}} \vee x_{s_{j2}}^{\beta_{j2}} \Big) \Big),$$

где $\alpha_i, \beta_{j1}, \beta_{j2} \in \{0,1\}$, $s_i, s_{j1}, s_{j2} \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

В работах [1], [2] показано, что биюнктивные функции (наряду с мультиаффинными, слабо положительными и слабо отрицательными функциями) порождают полиномиально решаемые классы систем булевых уравнений.

В [2] показано, что для числа Bi_k биюнктивных функций, зависящих от $k \geqslant 3$ переменных, справедливы оценки $2^{k(k-1)/2} < |\mathrm{Bi}| < 2^{k^2}$.

В работе, представленной данным ообщением, уточняется нижняя оценка числа биюнктивных функций.

Введем обозначения: $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; V_n — n-мерное пространство булевых векторов; Bi_{k1} — множество функций $f \in \mathrm{Bi}_k$, представимых в виде $f \wedge_{i=1}^{p} (x_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}})$, где $p \geqslant 1$, $s_{i1} < s_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, t$; $(\mathrm{Bi}_{k1}, \Sigma_k)$ — множество функций $f \in \mathrm{Bi}_k$, для которых найдутся такие $f' \in \mathrm{Bi}_{k1}$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in V_n$, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f'(x_1 \oplus \alpha_1, x_2 \oplus \alpha_2, \ldots, x_k \oplus \alpha_k). \tag{1}$$

Утверждение 1. *Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ существенно зависит от всех переменных и $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (\mathrm{Bi}_{k1}, \Sigma_k)$, то для нее существуют единственные функция f' и вектор $\alpha \in V_k$ с указанными в (1) свойствами.*

Следствие. *При $k \geqslant 2$ число функций множества $(\mathrm{Bi}_{k1}, \Sigma_k)$ равно $|(\mathrm{Bi}_{k1}, \Sigma_k)| = 2^{k(k+1)/2} - 2^k$.*

Утверждение 2. *Для числа Bi_k биюнктивных функций от k переменных справедлива нижняя оценка $|\mathrm{Bi}_k| > 2^{k(k+1)/2}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schaefer T.* Complexity of satisfiability problems. — In: Proceedings of the 10 Annual ACM Symposium on Theory of Computing Machinery. N. Y.: ACM, 1978, p. 216–226.
2. *Горшков С. П.* Применение теории NP-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений. — Обозрение прикл. промышл. матем., 1995, т. 2, в. 3, с. 325–398.