

В. А. Зотов (Москва, МАТИ). **Особенности процесса истечения жидкости из расширяющегося цилиндра.**

Рассмотрена математическая модель истечения жидкости из цилиндра высоты H_0 с расширяющимся радиусом $R(t)$ через расположенное на дне малое регулируемое отверстие площади $\sigma(t)$ с переменной скоростью $V(h)$, где $h(t)$ — уровень жидкости в момент времени t .

Определение характера изменения уровня жидкости в таком цилиндре сводится к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\pi \frac{d}{dt} (R^2(t)h(t)) = -\sigma(t)V(h), \quad (1)$$

при условии $R'(t) > 0$, $h'(t) < 0$.

Нахождение общего решения уравнения (1) для произвольных параметров аналитически невозможно. Однако в отдельных случаях для заданных законов увеличения диаметра цилиндра и скорости истечения жидкости возможно определение априорных оценок исследуемого процесса. В частности, если жидкость вытекает по закону Торричелли $V(h) = \mu\sqrt{2gh}$, где μ — коэффициент расхода жидкости ($0 < \mu < 1$), то для гидродинамических характеристик процесса справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. В классе круглых отверстий $\sigma(t) = \pi r^2(t)$ постоянного радиуса $r(t) = r_0 = \text{const}$ уровень жидкости в расширяющемся цилиндре измеряется по закону

$$h(t) = H_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^2 \left[1 - \mu \frac{r_0^2}{R_0} \sqrt{\frac{g}{2H_0}} \int_0^t \frac{dt}{R(t)} \right]^2.$$

Утверждение 2. При этом время T истечения всего объема жидкости определяется из условия

$$\int_0^t \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \left(\frac{R_0}{r_0^2} \right). \quad (2)$$

Утверждение 3. В частности, для цилиндра с неизменным радиусом $R(t) = R_0 = \text{const}$ обобщенная формула (2) принимает известный вид

$$T_0 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \left(\frac{R_0}{r_0} \right)^2.$$

Утверждение 4. Время истечения жидкости из цилиндра с радиусом $R(t)$, линейно расширяющимся от значения R_0 до значения R_1 , равно $T = f(k)T_0$, где

$$f(k) = \frac{k-1}{\ln|k|}, \quad k = \frac{R_1}{R_0}. \quad (3)$$

Функция (3) является возрастающей на множестве допустимых значений ($k \geq 1$), что физически оправдано.

Результаты, представленные в утверждениях 1–4, расширяют класс аналитически решенных задач прикладной гидродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зотов В. А. Нелинейная декомпозиция процесса истечения жидкости из резервуара. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 533–534.
2. Зотов В. А. Истечение жидкости из резервуара в классе регулируемых отверстий. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 5, с. 883–884.