А. С. Калитвин (Липецк, ЛГПУ). **Об интегро-дифференциальном уравнении одной задачи теории вероятностей.**

Пусть за бесконечно малый промежуток времени $(t, t+dt)$ параметр y с вероятностью $1-a(t,y)\,dt$ сохраняет прежнее значение и с вероятностью $u(t,y,z)\,dz$ переходит в y', где $z < y' < z+dz$ и $\int_R u(t,y,z)\,dz = a(t,y)$, причем $R=(-\infty,+\infty)$.

Если в момент времени t_0 известна дифференциальная функция рапределения $g(t_0,y)$, то функция распределения $g(t,y)$ при любом $t > t_0$ по определению имеет вид $g(t,y) = \int_R f(t_0,x,t,y)g(t_0,x)\,dx$, где неотрицательная функция $f(t_0,x,t,y)$ измерима в смысле Бореля относительно x, y и определяет схему некоторого стохастического процесса. А. Н. Колмогоров отметил [1], что для $g(t,y)$ должно, по-видимому, иметь место интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) $\partial g(t,y)/\partial t = -a(t,y)g(t,y) + \int_R g(t,z)u(t,z,y)\,dz$. При $R=[c,d]$ это уравнение обычно называют однородным ИДУ Барбашина. Однородные и неоднородные ИДУ Барбашина систематически исследованы в [2].

В данном докладе рассматриваются классические решения более общего ИДУ

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_R k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma + h(t,s), \quad R=(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

где $t, t_0 \in J$, $s \in R$, J — конечный или бесконечный промежуток числовой оси, а $c(t,s)$, $k(t,s,\sigma)$ и $h(t,s)$ — функции, заданные и измеримые на $D = J \times R$, $D \times R$, D соответственно. При этом уравнение (1) с начальным условием $x(t_0,s) = \varphi(s)$ интерпретируется как задача Коши $x'(t) = A(t)x(t) + h(t)$, $x(t_0) = \varphi(s)$ в банаховом пространстве X непрерывных и ограниченных на R функций с супремум-нормой, где $x(t) = x(t,s)$, $f(t) = f(t,s)$ — вектор-функции со значениями в X, $x'(t)$ — производная Фреше и $A(t)$ — оператор-функция $A(t)v(s) = c(t,s)v(s) + \int_R k(t,s,\sigma)v(\sigma)\,d\sigma$.

Теорема. *Если функция $t \to c(t,s)$ непрерывна на J равномерно относительно $s \in R$, функция $s \to c(t,s)$ непрерывна и ограниченна при каждом $t \in J$; $\int_R |k(t,s,\sigma)|\,d\sigma \leqslant m(t) < \infty$, $\lim_{s\to s_0}\int_R |k(t,s,\sigma) - k(t,s_0,\sigma)|\,d\sigma = 0$, $\lim_{t\to t_0}\sup_{s\in R}\int_R |k(t,s,\sigma) - k(t_0,s,\sigma)|\,d\sigma = 0$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывна на J, то задача Коши имеет в X единственное непрерывно дифференцируемое на J решение $x(t)$, а функция $x(t,s) = x(t)(s)$ есть решение уравнения (1) с начальным условием $x(t_0,s) = \varphi(s)$, причем $x(t,s)$ и $x'_t(t,s)$ — непрерывные на D функции.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986, 535 с.
2. *Appell J. M.*, *Kalitvin A. S.*, *Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. N. Y.: Marcel Dekker, 2000, 560 p.