И. А. К р а в ч е н к о (Москва, ВЦ РАН)**. О числе совпадений двух однородных случайных блужданий с положительными приращениями.**

Рассмотрим два случайных блуждания на множестве натуральных чисел $\tau_i = \{\tau_i(t)\}_{t=1}^{\infty}$, $i=1,2$. Здесь $\tau_i(t)=\sum_{r=1}^{t} h_r^{(i)}$, $t=1,2,\dots$, где $\{h_r^{(i)}\}_{r=1}^{\infty}$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины; распределение $h_1^{(i)}$ невырождено и сосредоточено на решетке натуральных чисел с максимальным шагом 1; математическое ожидание a случайной величины $h_1^{(i)}$ конечно ($a>1$), $i=1,2$; τ_1, τ_2 независимы и распределения $h_1^{(1)}$, $h_1^{(2)}$ совпадают.

Определим следующую случайную величину:

$$L_{N,M}=\sum_{t=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{I}\,\{\tau_1(t)=\tau_2(m)\},$$

где $\mathbf{I}\,\{\tau_1(t)=\tau_2(m)\}$ — индикатор события $\{\tau_1(t)=\tau_2(m)\}$; $t\geqslant 1$; $m\geqslant 1$; $L_{N,M}$ есть число совпадений двух однородных случайных блужданий τ_1, τ_2 с положительными приращениями на отрезках натуральных чисел $\{1,\dots,N\}$, $\{1,\dots,M\}$ соответственно.

Относительно математического ожидания $L_{N,N}$ верна следующая теорема, полученная с использованием асимптотических разложений в локальной предельной теореме для решетчатых распределений ([1, глава VII, § 3]).

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}\,(h_1^{(1)})^4<\infty$. *Тогда при* $N\to\infty$ *имеет место следующее асимптотическое выражение*:

$$\mathbf{E}\,L_{N,N}=\frac{N}{a}\biggl(1+O\biggl(\frac{\ln N}{N^{1/2}}\biggr)\biggr).$$

В работе [2] исследовалась последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $\{(\eta_k^{(1)},\eta_k^{(2)})\}_{k=1}^{\infty}$, где случайные величины $\eta_k^{(1)}$, $\eta_k^{(2)}$ принимают натуральные значения и суть последовательные промежутки между совпадениями τ_1 и τ_2, т. е. выполняются равенства $\tau_1(\sum_{j=1}^{k}\eta_j^{(1)})=\tau_2(\sum_{j=1}^{k}\eta_j^{(2)})$ для любого $k\geqslant 1$.

Имеют место соотношения: $\mathbf{E}\,\eta_k^{(1)}=\mathbf{E}\,\eta_k^{(2)}=a$.

Вопрос о конечности или бесконечности вторых моментов случайных величин $\eta_1^{(1)}$, $\eta_1^{(2)}$ в зависимости от существования у случайных величин $h_1^{(1)}$, $h_1^{(2)}$ моментов более высокого порядка, чем первый, остается в общем случае открытым.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *существует конечная ненулевая дисперсия* $\sigma^2=\mathbf{D}\,h_1^{(1)}=\mathbf{D}\,h_1^{(2)}$;

2) *существует конечная ненулевая дисперсия* $\Lambda^2=\mathbf{D}\,\eta_1^{(1)}=\mathbf{D}\,\eta_1^{(2)}$;

3) *при* $N,M\to\infty$ *величина* $(N-M)/(N+M)^{1/2}$ *сходится к конечному числу* λ.

Тогда вероятность

$$\mathbf{P}\biggl\{\frac{L_{N,M}-(N+M)/(2a)}{\sqrt{(N+M)\Lambda^2/(2a^3)}}\geqslant x\biggr\}$$

стремится к вероятности

$$\mathbf{P}\biggl\{\xi_1\leqslant -x+\frac{\lambda}{\Lambda}\biggl(\frac{a}{2}\biggr)^{1/2},\ \xi_2\leqslant -x-\frac{\lambda}{\Lambda}\biggl(\frac{a}{2}\biggr)^{1/2}\biggr\},$$

где случайный вектор (ξ_1,ξ_2) *распределен по нормальному закону со средним вектором* $(0,0)$ *и матрицей вторых моментов* $\begin{pmatrix}1&\rho\\ \rho&1\end{pmatrix}$; $\rho=1-\sigma^2/(\Lambda^2 a)$.

В работе [2, § 3] рассмотрен частный случай случайных блужданий с приращениями 1 и 2, когда $\mathbf{P}\{h_1^{(i)} = 1\} = \mathbf{P}\{h_1^{(i)} = 2\} = 1/2$ (в этом случае $\mathbf{E}\, h_1^{(i)} = a = 3/2$, $\mathbf{D}\, h_1^{(i)} = \sigma^2 = 1/4$), $i = 1, 2$. Показано, что $\mathbf{E}\, \eta_1^{(i)} = 3/2$, $\mathbf{D}\, \eta_1^{(i)} = 7/12$, $i = 1, 2$. Таким образом, выполняются первых два условия теоремы 2, а при выполнении третьего условия, накладывающего ограничения на поведение величин N и M, будет следовать утверждение теоремы 2 для данного частного случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
2. *Кравченко И. А.* О последовательности общих точек однородных случайных блужданий с положительными приращениями и их использование для оценки параметров одного способа скрытой передачи информации. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 4, с. 598–609.