А. Д. М а р к о в с к и й (Москва, МГУЛ). **Аксиоматический подход к машинным арифметикам.**

Реальные вычисления всегда производятся над конечными множествами чисел. О них говорят как о множествах «машинных чисел», входящих в «машинную арифметику», даже если вычисления производятся вручную. Чтобы обозреть и классифицировать все допустимые машинные арифметики, а также создать универсальную, не привязанную к конкретной машинной арифметике, теорию точности реальных вычислений, необходимо использовать аксиоматический метод. Приводимая ниже аксиоматика совершенствует систему аксиом работы [1].

Пусть $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \subset \mathbf{R}$ — конечное множество действительных чисел, именуемое *множесивом машинных чисел* или *шкалой с делениями* $d_1, d_2, \ldots, d_n$, $n \in \mathbf{N}$; T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ — бинарная операция, именуемая *идеальной операцией* T; $\overline{T}$: $D^2 \to D$ — бинарная операция, именуемая *машинной операцией* T ($\overline{T} := \overline{+}$ — машинное сложение).

Пара $A = (D, \overline{T})$, состоящая из шкалы D и машинной операции T, называется *машинной арифметикой* с операцией T, если существует отображение $\overline{\cdot}$: $\mathbf{R} \to D$, со следующими свойствами.

Аксиома 1. $\forall x \in \mathbf{R}$: $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$.

Аксиома 2. $\forall x_1 \in \mathbf{R}\ \forall x_2 \in \mathbf{R}$: $x_1 \leqslant x_2 \implies \overline{x}_1 \leqslant \overline{x}_2$.

Аксиома 3. $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists \delta = \delta(x) \in \mathbf{R}$: $\overline{x} \leqslant x(1 + \delta)$.

Аксиома 4. $\forall x_1 \in D\ \forall x_2 \in D$: $x_1 \overline{T} x_2 = \overline{x_1 T x_2}$.

Отображение $\overline{\cdot}$: $\mathbf{R} \to D$ называается *вводом*, или *машинной аппроксимацией*, или *измерением*.

Аксиомы 1–4 имеют простую интерпретацию. Согласно аксиоме 1, если действительное число x при вводе (измерении) отобразилось в машинное число (деление) $\overline{x}$, то при повторном вводе машинное число $\overline{x}$ можно перевести в себя, так что $\overline{\overline{x}} = \overline{(\overline{x})} = \overline{x}$.

Содерхание аксиомы 2 заключается в том, что при машинной аппроксимации или измерении действительных чисел исходный порядок между ними может быть сохранен. Аксиома 3 требует конечности величины $\delta(x)$ относительной ошибки машинной аппроксимации (измерения) величины x.

Наконец, аксиома 4 определяет машинную операцию T как последовательное выполнение идеальной операции T и машинной аппроксимации $\overline{\cdot}$: $\mathbf{R} \to D$ полученного идеального результата. Машинную операцию T ($\overline{T}$), не удовлетворяющую аксиоме 4, настолько же неестественно рассматривать как допустимое приближение идеальной операции T, насколько недопустимо при определении операции ввода отказаться от выполнения хотя бы одной из аксиом 1–3.

Существенно, что из аксиомы 3 следует ниже приведенное утверждение.

Теорема. $\overline{0} = 0$, *т. е. ноль всегда является машинным числом.*

На основе аксиоматической теории машинных арифметик проведена их классификация по различным критериям с выявлением оптимальных и превосходящих по определенным критериям известные; получены основополагающие результаты по универсальному анализу ошибок округления, найдены все классы «безошибочных арифметик» для всех арифметических операций.

Предметом открытия является «поразительное» соответствие между аксиомами структуры машинных арифметик и аксиомами топологии в терминах оператора замыкания; поразительное хотя бы потому, что по содержанию сравниваемые структуры кажутся чуть ли не противоположными: машинные арифметики — «вместилище для вычислений на *дискретных* множествах машинных чисел, основа приближенных представлений чисел», а топология — фундамент «непрерывности для всей математики». Найденное соответствие послужило основой для новой теории «мерильных структур», синтезирующей структуры топологии и машинных арифметик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марковский А. Д.* Автореферат диссертации. М.: ВЦ АН СССР, 1980.