

**Ю. Л. Павлов, М. М. Степанов** (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН, Turku, Åbo Akademy University). **Предельные распределения числа петель вершин случайного Интернет-графа.**

Рассматриваются случайные графы Интернет-типа, состоящие из  $N$  вершин. Степени вершин являются такими независимыми одинаково распределенными случайными величинами  $\xi_1, \dots, \xi_N$ , что  $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq k\} = k^{-\tau}$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , а  $\tau$  — положительный параметр. Это распределение определяет число различных «полуребер» графа, выходящих из каждой вершины. Ребра графа образуются путем равновероятного соединения «полуребер» друг с другом. В случае необходимости для обеспечения четности суммы степеней в граф вводится дополнительная вершина единичной степени. Легко видеть, что такая конструкция графа допускает кратные ребра и петли. Известно (см., например, [1], [2]), что такие случайные графы являются подходящими моделями различных сложных сетей телекоммуникаций, в частности, сети Интернет. Наблюдения за реальными сетями показали, что обычно  $\tau \in (1, 2)$ . Возьмем произвольную вершину графа и обозначим  $\xi$  ее степень. Обозначим также  $\eta$  число петель этой вершины. В [2] показано, что если  $\beta \in (0, 1/2)$ , то  $\mathbf{P}\{\eta = 0 | \xi \leq N^\beta\} \rightarrow 1$ , а если  $\beta \in (1/2, 1)$ , то  $\mathbf{P}\{\eta > 0 | \xi \geq N^\beta\} \rightarrow 1$ .

В докладе приводится полное описание предельного поведения условного распределения случайной величины  $\eta$  при всех возможных значениях  $\xi$ . В частности, справедливо такое утверждение.

**Теорема.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $\tau \in (1, 2)$ ,  $\alpha = v^2 N^{2/\tau-1} \rightarrow \infty$ , где  $v = v(N)$  — такая положительная величина, что  $v = O(1)$ ,  $v N^{2/\tau-3/2} \rightarrow 0$ . Тогда равномерно относительно таких целых  $k$ , что  $u = (k - \alpha)/\sqrt{\alpha}$  лежит в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\eta = k | \xi = v N^{1/\tau}\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-u^2/2}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos C. On Power-Law Relationships of the Internet Topology. — Computer Communications Rev., 1999, v. 29, p. 251–262.
2. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. — Performance Evaluation, 2004, v. 55, p. 3–23.