С. В. Стафеев (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **Полиномиальные инварианты для графовых моделей с латентными переменными.**

Рассмотрим следующую модель:

$$\mathbf{X} = \mathbf{AH} + \mathbf{Y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}^t$ — вектор наблюдаемых случайных величин с ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{ij})$; $\mathbf{H} = \{H_1, \ldots, H_k\}^t$ — вектор независимых в совокупности нормально распределенных латентных случайных величин (факторов), причем $\mathbf{M}(H_j) = 0$, $\mathbf{Var}(H_j) = 1$, $j = 1, \ldots, k$; $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — матрица факторных нагрузок; вектор остатков $\mathbf{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}^t$ имеет невырожденное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$; $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{H}$ независимы. Взаимосвязь компонент вектора $\mathbf{Y}$ описывается ковариационной графовой моделью со структурой $G = (V, E)$, где $V = \{1, \ldots, n\}$ и $(i, j) \notin E$, если $\theta_{ij} = 0$.

Пусть $f(\Sigma)$ — полином, зависящий от элементов матрицы Σ. Если $f(\Sigma) = 0$, то полином $f(\Sigma)$ будем называть *полиномиальным инвариантом* модели (1). Совокупность всех полиномиальных инвариантов образует идеал $I^G_{k,n}$ кольца многочленов $\mathbf{R}[\sigma_{ij},\, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n]$.

Пусть $\overline{G} = (V, \overline{E})$ — дополнительный к G граф. Образуем граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k),\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant k\}$, а $\mathbf{E} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) | \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k),\ \mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k),\ (i_s, j_l) \in \overline{E},\ s, l = 1, \ldots, k\}$. Обозначим $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$ детерминант матрицы $\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = (\sigma_{i_m, j_l})^k_{m,l=1}$. Пусть $C = (V_C, E_C)$, где $V_C = \{\alpha_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, а $E_C = \{(\alpha_i, \alpha_{i+1}),\ i = 1, \ldots, m-1,\ (\alpha_1, \alpha_m)\}$ — четный простой цикл. Определим полином

$$f_C(\Sigma) = \prod_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in E'_C} |\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}| - \prod_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in E''_C} |\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|,$$

где $E'_C = \{(\alpha_{2j+1}, \alpha_{2j+2}),\ j = 0, \ldots, m/2 - 1\}$ и $E''_C = E_C \setminus E'_C$.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{C}(\mathbf{G})$ — *множество всех четных простых циклов графа* $\mathbf{G}$. *Тогда* $\{f_C(\Sigma), C \in \mathbf{C}(\mathbf{G})\} \subset I^G_{k,n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Drton M.*, *Sturmfels B.*, *Sullivant S.* Algebraic factor analysis: tetrads, pentads and beyond. — Probability Theory and Related Fields, 2007, v. 138, p. 463–493.
2. *Drton M.*, *Sullivant S.* Algebraic statistical models. — Statistica Sinica, 2007, v. 17, p. 1273–1297.