В. В. Богданов, А. Ю. Богданов (Ульяновск, УлГТУ, УлГУ). **Модели динамики шлифовального круга: от порядка к хаосу.**

Современные представления о теории дискретных детерминированных и стохастических динамических систем, их сложное и зачастую непредсказуемое поведение, обнаруженное в результате компьютерного моделирования нелинейных уравнений, позволили авторам предположить, что эти системы могут быть с успехом применены при описании и моделировании процессов абразивной обработки и, в частности, процессов шлифования.

Для построения модели изменения количества абразивных зерен в процессе контактного взаимодействия инструмента и заготовки требуется учесть основные факторы, влияющие на изменение числа зерен на поверхности абразивного круга. Таковыми являются появление зерна на поверхности, например, в процессе правки круга, и удаление (уничтожение) зерна с поверхности круга (в результате его разрушения с обрабатываемым металлом или в результате правки круга). Пусть $(x_{n+1} - x_n)$ — количество новых зерен на поверхности абразивного круга, появившихся между соседними моментами наблюдений n и $n+1$. Будем учитывать, что процесс катастрофического износа шлифовального круга и экспоненциальный рост количества новых зерен не реализуется на практике, а также то, что факторы технологического, экономического характера, и факторы, связанные с безопасностью персонала, накладывают на динамику роста числа зерен на поверхности круга трудно поддающиеся формализации ограничения [1–3].

Для учета этих факторов авторами предлагается использовать детерминированную модель на основе логистического уравнения вида

$$x_{n+1} - x_n = \delta \frac{a}{k} x_n (k - x_{n+1}) \tag{1}$$

Заметим, что уравнение (1) имеет точное решение

$$x_n = \frac{k}{1 + m\left(\frac{1}{1+\delta a}\right)^n}, \tag{2}$$

где $k > 0, m > 0, a > 0$. Параметр k характеризует общее число новых абразивных зерен, которые могут появиться при неограниченно долгом наблюдении за процессом формирования поверхности шлифовального круга. $\delta \frac{a}{k}$ — коэффициент удаления зерен с поверхности шлифовального круга, связанный с ограниченностью ресурса несущей поверхности круга. Параметр $(1 + \delta a)$ — коэффициент прироста зерен.

Выбор квадратичной зависимости в уравнении (1) можно пояснить следующим образом. Недостаток ресурса (чрезвычайно высокая степень износа шлилифовального круга) порождает развитие процессов, связанных с разработкой более качественных, стойких шлифовальных кругов, разработкой новых технологических приемов, повышающих стойкость шлифовальных кругов и т. д. На поверхности круга для x зерен количество возможных парных (другие учитывать не будем) контактов с обрабатываемой поверхностью материала заготовки, в результате которых произойдет разрушение зерна (удаление его с поверхности круга), пропорционально x^2. Не все контакты заканчиваются разрушением или удалением зерна с поверхности шлифовального круга. Соответствующий процент удаления зерен с поверхности и задается коэффициентом $\delta \frac{a}{k}$.

Детерминированное уравнение (1) приводит к более точному оцениванию параметров модели и хорошей степени согласования с экспериментом, даже при небольшом количестве экспериментальных данных, по сравнению с линейными моделями.

Как развитие модели (1), авторами предлагается рассматривать следующее стохастическое неавтономное нелинейное логистическое уравнение

$$x_{n+1} - x_n = \delta \frac{a_{n+1}}{k} x_n (k - x_{n+1}), \tag{3}$$

где a_n — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Точное решение уравнения (3) имеет вид

$$x_n = \frac{k}{1 + m\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\delta a_j}\right)}. \quad (4)$$

Обозначим $y_j = \frac{1}{1+\delta a_j}$ и предположим, что y_j независимы и одинаково распределены на отрезке $[a, b]$ с плотностью распределения $f(x) = \frac{\alpha(x-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha}}$, т.е. имеют степенное распределение. Пусть $l = \frac{k}{1+mx}$. Тогда вероятность

$$P\{x_n > l\} = P\left\{\prod_{j=1}^{n} y_j < x\right\} = P\left\{\sum_{j=1}^{n} z_j > -\ln x\right\} = \exp(\gamma \ln x)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-\gamma \ln x)^j}{j!},$$

где $z_j = -\ln y_j, j = 1, 2, \ldots,$ независимые одинаково распределенные случайные величины, подчиненные экспоненциальному закону распределения, а сумма $\sum_{j=1}^{n} z_j$ является случайной величиной, подчиненной распределению Эрланга. Таким образом, предложенная стохастическая модель (3) позволяет получать распределение оценки на шаге n.

Заметим, что предположение о степенном законе распределения подтверждается экспериментальными данными. Важно, что стохастическая модель, рассмотренная в данной работе, имеет точное решение и позволяет находить закон распределения оценки на каждом шаге, что невозможно для детерминированной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 08-08-97033р-поволжье, 09-08-97004р-поволжье, а также в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы, 2009–2010 гг.».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров И. П.* Стохастическая модель процесса шлифования. — Изв. ВУЗов. Машиностроение, 2003, № 6, с. 64–72.
2. *Богданов В. В.*, *Богданов А. Ю.* Об одном вероятностном подходе к решению обратных задач нахождения характеристик шлифованных поверхностей. — Труды Международной школы-конференции «Обратные задачи: теория и приложения», Ханты-Мансийск, Россия, 11–19 августа, 2002, ч. I, с. 13–17.
3. *Богданов А. Ю.*, *Кондратьева Н. Н.* Математическая модель процесса диспергирования материала заготовки с учетом износа и засаливания шлифовального круга. Справочник. Инженерный журнал. 2008, № 10, с. 47–49.