Ю. Б. Буркатовская, С. Э. Воробейчиков (Томск, ТПУ, ТГУ). **Гарантированное обнаружение разладки процесса ARCH(p).**

Рассматривается случайный процесс $\{x_t\}$ вида

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_l, \quad \sigma_t^2 = \lambda_0 + \lambda_1 x_{t-1}^2 + \cdots + \lambda_p x_{t-p}^2,$$

где $\{\varepsilon_t\}$ $(t \geqslant 1)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{M}\,\varepsilon_t = 0$, $\mathbf{M}\,\varepsilon_t^2 = 1$. В момент θ вектор параметров $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ меняет свое значение с μ_0 на μ_1, причем $\|\mu_0 - \mu_1\|^2 > \Delta$. Ставится задача по наблюдениям за процессом $\{x_t\}$ обнаружить момент разладки θ.

Поскольку значения параметров процесса до и после разладки неизвестны, в процедуре обнаружения разладки используются оценки неизвестных параметров, построенные на различных участках наблюдения процесса. Представим $\{x_t^2\}$ в виде $x_t^2 = \sigma_t^2 + \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1) = (\lambda_0 + \lambda_1 x_{t-1}^2 + \cdots + \lambda_p x_{t-p}^2) + (\lambda_0 + \lambda_1 x_{t-1}^2 + \cdots + \lambda_p x_{t-p}^2) B\eta_t$, где $\eta_t = \varepsilon_t^2 - 1$, а $B^2 = \mathbf{M}\,(\varepsilon_t^2 - 1)^2$. Введем обозначения:

$$y_{t-1}^2 = \max\{1, x_{t-1}^2, \ldots, x_{t-p}^2\}, \quad z_t = \frac{x_t^2}{y_{t-1}^2}, \quad a_{t-1} = \left[\frac{1}{y_{t-1}^2}, \frac{x_{t-1}^2}{y_{t-1}^2}, \ldots, \frac{x_{t-p}^2}{y_{t-1}^2}\right].$$

Случайный процесс $z_t = a_{t-1}\Lambda + a_{t-1}\Lambda B\eta_t$ обладает ограниченной дисперсией шумов. Для оценивания вектора параметров Λ этого процесса предлагается использовать модифицированный метод наименьших квадратов. Оценка параметров имеет вид

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{l=n+1}^{\tau} v_t a_t^T z_{t+1}\right) A^{-1}(\tau), \quad A(k) = \sum_{t=n+1}^{k} v_t a_t^T a_t,$$

где n — первоначальный объем наблюдений, необходимый для компенсации неизвестной дисперсии шумов, $\tau = \inf\{k \geqslant 1\colon \nu_{\min}(k) \geqslant H\}$ — случайный момент остановки, $\nu_{\min}(k)$ — минимальное собственное значение матрицы $A(k)$. Выбор величины Γ_n и коэффициентов v_t гарантирует, что среднеквадратическое отклонение оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения параметров ограничено сверху величиной $(H+p)/H^2$.

Для обнаружения момента разладки θ сначала определяются интервалы наблюдений $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$, $i \geqslant 1$, на каждом из которых вычисляются оценки Λ_i^*. Далее сравниваются оценки параметров на интервалах, номера которых отличаются на заданное натуральное число $l > 1$. Если интервал $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ не содержит момента разладки, то значение параметра Λ на этом интервале является постоянным и совпадает с μ_0 или μ_1. Таким образом, для некоторого номера i значения параметров на интервалах с номерами i и $i+l$ отличаются на величину, не меньшую Δ. Решение о наличии разладки принимается, если $\|\Lambda_i^* - \Lambda_{i-l}^*\|$ превысит некоторый порог δ. Благодаря использованию гарантированных оценок вектора параметров Λ вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия на каждом интервале наблюдений ограничены сверху и зависят от параметров процедуры (H, δ).