Е. В. Винников (Москва, МГУ). **Задача оптимального распределения ресурсов в модели диффузии информации.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается нелинейная задача оптимального управления

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = (\alpha x(t) + \beta u(t))(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in [0,1], \quad x_0 \in [0,1), \\ &J = \int_0^T [(1 - x(t))^2 + (ru(t))^2]\, dt \to \min, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \alpha, \beta, r, T - \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Эта система описывает модель диффузии информации в социальной группе по внешнему и внутреннему каналам распространения информации по отношению к общности. Здесь $x(t)$ — отношение количества людей, принявших информацию, к общей численности группы N^*, α — максимальное число актов общения между всеми членами группы, $u(t)$ — управление, β — максимальная интенсивность распространения внешней информации в единицу времени, r — коэффициент стоимости внешнего воздействия на одного человека в группе. Функционал J показывает, что мы хотим информировать максимальное число людей, подверженных распространяемой информацией, при этом затратив наименьшее число ресурсов на внешнее воздействие. В отличие от работы [1], где $J = \int_0^T (x(t) - ru(t))^2\, dt \to \max$, и при некоторых значениях $r > 0$ управление на всем интервале времени равно 1, функционал данной работы отвечает минимизации ресурсов при всех $r > 0$. Функция насыщения $\mathrm{sat}(s) = \mathrm{sign}(s)$, $|s| > 1$ и $\mathrm{sat}(s) = s$, $|s| \leqslant 1$. Краевая задача принципа максимума Понтрягина (пмП) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = (\alpha x(t) + \beta u(t))(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sat}\left(\frac{\psi(t)\beta(1 - x(t))}{r^2} - 1\right) + 1\right], \\ &\dot{\psi}(t) = 2x(t) - 2 + \psi(t)(\alpha(2x - 1) + \beta u), \quad \psi(T) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В силу теоремы о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций пмП [3] экстремальная тройка (x_*, u_*, ψ_*) (решение задачи (2)) является оптимальной тройкой в задаче (1). Оптимальное управление $u_{op}(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = T$. Проведены многочисленные численные эксперименты решения задачи при различных значениях параметров α, β, r, T в системе Matlab. Проведено сравнение результатов с примерами из работы [1]. Построенные оптимальная траектория $x_{op}(t)$ и оптимальное значение функционала J_{op} наложены на множество достижимости данной системы. При $\alpha = \beta = 0,3$, $r = 0,06$, $x_0 = 0$, $T = 10$ получены графики (см. рис.), где жирными линиями изображены $x_{op}(t)$, $u_{op}(t)$, $J_{op}(t)$, а вертикальными — все возможные значения $x(t)$ и $J(t)$ соответственно.

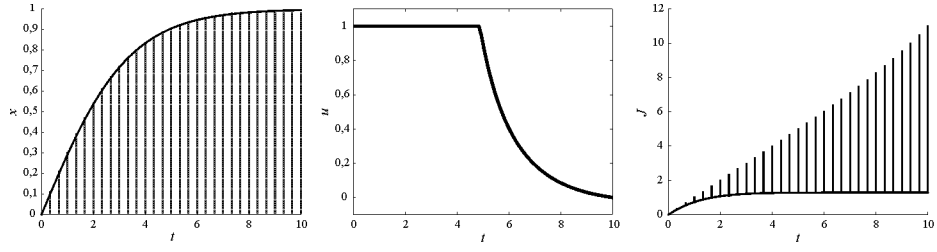

Рис. Графики $x_{op}(t)$, $u_{op}(t)$, $J_{op}(t)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измоденова К. В.*, *Михайлов А. П.* Об оптимальном управлении процессом распространения информации. — Математическое моделирование, 2005, т. 17, № 5, с. 67–76.
2. *Понтрягин Л. С.*, *Болтянский В. Г.*, *Гамкрелидзе Р. В.*, *Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
3. *Киселев Ю. Н.* Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. — В сб. материалов научного семинара «Математические модели в экономике и биологии». М.: МАКС Пресс, 2003, с. 57–67.