Е. В. В и н н и к о в (Москва, МГУ). **Численное построение множества достижимости нелинейных управляемых систем.**

Рассматривается нелинейная управляемая динамическая система, описываемая уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in I = [0, T], \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbf{R}^m, \quad x(0) \in X_0, \tag{1}$$

где P — компакт в $\mathbf{R}^m$, T — конечная длительность процесса. Предполагается, что $f(t, x, u)$ непрерывна по t, x, u в $I \times \mathbf{R}^n \times P$, для любой ограниченной замкнутой области $D \subset I \times \mathbf{R}^n \times P$ функция $f(t, x, u)$ липшицева по совокупности переменных t, x, u и выполнено условие Филиппова: существует такая постоянная $\mu \in [0, \infty)$, что $\|f(t, x, u)\| \leqslant \mu(1 + \|x\|)$ для любых $(t, x, u) \in D$. Множество достижимости (МД) строится при помощи пиксельного метода на сетках по времени t, фазовой переменной x и управлению u на множестве D с диаметрами разбиений Δ_t, ε_x и ε_u соответственно. Построение МД возможно при помощи метода Эйлера

$$X_{i+1} = X(t_{i+1}, x, u) = \bigcup_{x(t_i) \in X_i} \left\{ x(t_i) + \Delta_t \bigcup_{u \in P} f(t_i, x(t_i), u) \right\} \tag{2}$$

или Рунге-Кутта 2-го порядка точности (РК-2)

$$X_{i+1} = X(t_{i+1}, x, u) = \bigcup_{x(t_i) \in X_i} \left\{ x(t_i) + \Delta_t \bigcup_{u \in P} f\left(t_i + \frac{\Delta_t}{2}, x(t_i) + \Delta_t \frac{f(t_i, x(t_i), u)}{2}, u \right) \right\}. \tag{3}$$

Получены оценки на хаусдорфово расстояние между МД, приближенно построенными по формулам (2), (3), и истинным МД. Разработана программа, строящая в среде Matlab численно МД в двумерном и трехмерном случаях. Реализованы эффективные алгоритмы фильтрации граничных точек. Представлена возможность ускорения работы программы для выпуклых МД за счет расчета только граничных точек и последующего взятия их выпуклой оболочки. Для различных нелинейных управляемых систем построены МД и проведено сравнение с примерами из работы [4]. Проведено сравнение МД, имеющих аналитическое описание границы, с численно построенными.

В качестве иллюстрации численного построения МД расмотрим модифицированнный пример Ли–Маркуса из [3]:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 u_1 - x_1 u_2, \quad x_1(0) = 1, \quad |u_1| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ &\dot{x}_2 = -x_1 u_1 - x_2 u_2, \quad x_2(0) = 0, \quad |u_1| \leqslant 0,2, \quad u_1^2 + (5u_2)^2 \leqslant 1. \end{aligned} \tag{4}$$

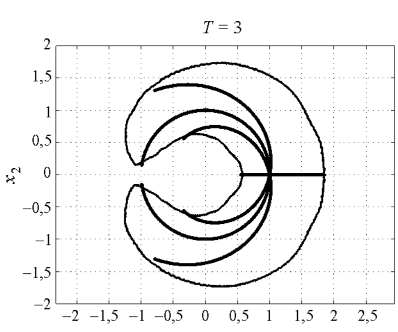

Рис. 1. МД в модифицированном примере Ли-Маркуса (4) (метод Эйлера)

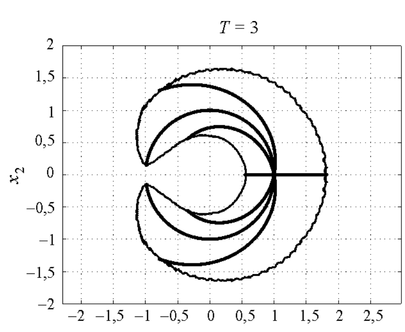

Рис. 2. МД в модифицированном примере Ли-Маркуса (4) (метод РК-2)

Границы МД системы (4), построенные численно по формулам (2) и (3) при $\Delta_t = 0,05$, $\varepsilon_x = 0,005$ и $\varepsilon_u = 0,01$, изображены на рис. 1 и 2. Внутренними линиями на этих рисунках изображены траектории системы, полученные при помощи принципа максимума Понтрягина. Как показывают многочисленные расчеты, использование метода Рунге–Кутта 2-го порядка точности (3) дает лучшую аппроксимацию МД, чем метод Эйлера (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусейнов Х. Г.*, *Моисеев А. Н.*, *Ушаков В. Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем. — Прикладная математика и механика, 1998, т. 62, в. 2, с. 179–187.
2. *Никольский М. С.* Об аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения. — Вестник МГУ, серия вычисл. матем. и кибернетика, 1987, т. 4, с. 31–34.
3. *Киселев Ю. Н.* Построение точных решений для нелинейной задачи быстродействия специального вида. — Фундаментальная и прикладная матем., 1997, т. 3, в. 3, с. 847–868.
4. *Горнов А. Ю.*, *Тятюшкин А. И.* Вычислительные технологии поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления. — В сб. материалов международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». Алматы, 2008.