И. А. Гуримская (Нерюнгри, ЮЯИЖТ). **О решении дифференциальных уравнений на плоскости с функциональными коэффициентами.**

При исследовании установившихся процессов в неоднородных средах большой интерес имеет задача построения решений уравнений $\operatorname{div}(k\nabla\varphi) = 0$, имеющих заданные особые точки (источники, стоки и т. д.), при функциональных коэффициентах k, характеризующих неоднородность проницаемых сред. Рассмотрим на плоскости с декартовыми координатами x, y класс функций $k(\eta) = p\,\mathrm{th}^2 a(\eta + \eta_0)$, где p, a, η_0 — положительные постоянные; ξ, η — параболические координаты: $x = \xi^2 - \eta^2$, $y = 2\xi\eta$, $z = \zeta^2$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \geqslant 0$, т. е. проницаемость среды минимальна на луче $(x > 0,\ y = 0)$. Отсюда для потенциала $\varphi(\xi, \eta)$ имеем задачу

$$k\partial_\xi^2\varphi + \partial_\eta(k\partial_\eta\varphi) = 0; \qquad \varphi(\xi, 0) = \varphi(-\xi, 0), \qquad \partial_\eta\varphi(\xi, 0) = -\partial_\eta\varphi(-\xi, 0) \tag{1}$$

при заданных особых точках. Условия сопряжения (1) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на разрезе $\eta = 0$ плоскости течения z, т. е. этим разрезом можно пренебречь. Представляя φ в виде $\varphi = au - \mathrm{cth}[a(\eta + \eta_0)]\partial_\eta u$, для функции $u(\xi, \eta)$ задача (1) примет вид $\Delta u = 0$, $a[u(\xi, 0) - u(-\xi, 0)] = c[\partial_\eta u(\xi, 0) - \partial_\eta u(-\xi, 0)]$, $ac[\partial_\eta u(\xi, 0) + \partial_\eta u(-\xi, 0)] = \partial_\eta^2 u(\xi, 0) + \partial_\eta^2 u(-\xi, 0)$, $c = \mathrm{cth} a\eta_0$.

Пусть известна гармоническая функция $f(\xi, \eta)$, имеющая на плоскости ζ заданные особые точки при $\eta > 0$. Следуя методу [1], предположим сначала, что $f(\xi, 0)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами f_i. Тогда $f(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{\lambda\eta}(f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2)\, d\lambda$ при $\eta \leqslant 0$, где $\sigma_1 = \sin\lambda\xi$, $\sigma_2 = \cos\lambda\xi$. Отсюда следуют равенства

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} F_i(\xi, \eta + t)\, dt = 2\int_0^\infty e^{\lambda\eta} \frac{f_i\sigma_i}{\lambda + \gamma}\, d\lambda, \qquad i = 1, 2, \tag{2}$$

где $F_i(\xi, \eta) = f(\xi, -\eta) + (-1)^i f(-\xi, -\eta)$. Представляя функцию u в виде $u = f(\xi, \eta) + \int_0^\infty e^{-\lambda\eta}(b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2)\, d\lambda$, определяя из условий сопряжения (1) параметры b_i, с учетом формул (2) получим

$$u = f(\xi, \eta) - f(-\xi, -\eta) - \gamma_i \int_0^\infty e^{-\gamma_i t} F_1(\xi, \eta + t)\, dt + \gamma_j \int_0^\infty e^{-\gamma_j t} F_2(\xi, \eta + t)\, dt, \tag{3}$$

где $\gamma_1 = a\mathrm{th} a\eta_0$, $\gamma_2 = a\mathrm{cth} a\eta_0$, $i = 1$, $j = 2$.

Рассмотрим функцию проницаемости $k(\eta) = p\,\mathrm{cth}^2 a(\eta + \eta_0)$, т. е. проницаемость среды максимальна на луче $(x > 0,\ y = 0)$. Рассуждая аналогично, решение задачи (1) найдем в виде $\varphi = au - \mathrm{th}[a(\eta + \eta_0)]\partial_\eta u$, где u имеет вид (3) при $i = 2$, $j = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения. — Журнал вычислит. матем. и матем. физики, 2007, т. 47, № 9, с. 1550–1556.