В. Т. Дубровин (Казань, КГУ). **Скорость сходимости в многомерной теореме для теоретико-числовых эндоморфизмов.**

Пусть T — преобразование интервала $(0,1)$, определяемое выражением $Tt = \{\varphi(t)\}$, где $\varphi = f^{-1}$, $\{\cdot\}$ — обозначение дробной доли, f — функция, удовлетворяющая одному из условий a), b) и условию c). Условия эти таковы.

a) Функция f определена и убывает на $[1,\infty)$, $f(1)=1$, f строго положительна, непрерывна и строго убывает на $[1,k)$ и $f=0$ на $[k,\infty)$, где k — либо натуральное число, либо ∞ (здесь имеется в виду, что $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$). Кроме того, $|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant |x_2-x_1|$ и существует такое λ, $0<\lambda<1$, что $|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant \lambda|x_2-x_1|$, если $1+f(2)<x_1<x_2$.

b) Функция f определна и возрастает на $[0,\infty)$, $f(0)=0$, f непрерывна и строго возрастает на $[0,k)$ и $f=1$ на $[k,\infty)$, где k — либо натуральное число, либо ∞ (в этом случае $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$). Кроме того, $f(x_2)-f(x_1)<x_2-x_1$, если $1 \leqslant x_2 < x_1$.

c) $\operatorname{ess\,inf}_{0<x<1} f'_{E_n}(x) \leqslant D \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{0<x<1} f'_{E_n}(x)$. Здесь $E_n=(a_1,\dots,a_n)$, где $a_i=[\varphi(T^i x)]$, $[\cdot]$ — обозначение целой части, $f_{E_n}(x)=f(a_1+f(a_2+\dots+f(a_n+x)))$, а D — постоянная, не зависящая ни от E_n, ни от n.

Пусть M — множество точек интервала $(0,1)$, в которых определены все степени отображения T.

В работе [1] доказано, что если выполняются условия a), b) или b), c), то на интервале $(0,1)$ существует такая измеримая функция p, что $D^{-1} \leqslant p(x) \leqslant D$, $\int_0^1 p(x)\,dx = 1$ и T есть эргодический эндоморфизм пространства M с мерой $\mu(X)=\int_X p(x)\,dx$. Функция $p(x)$ единственна с точностью до множества меры 0.

Точки, в которых не определены все степени T, определяются равенствами $T^k t = 0$, $k=0,1,2,\dots$. Множество таких точек счетно, поэтому в метрических вопросах различием между M и интервалом $(0,1)$ можно пренебречь, что мы и будем делать.

Рассмотрим последовательность m-мерных векторов $\overline{g}(T^k t) = (g_1(T^k t),\dots, g_m(T^k t))$, где $g_i(T^k t)$ $(i=1,\dots,m)$ — вещественные, заданные на $(0,1)$ и измеримые по мере Лебега функции. Предположим, что выполнены следующие условия.

1. $\int_0^1 g_i(t)\,d\mu(t)=0$, $|g_i(t)| \leqslant C$, $i=1,\dots,n$, C — постоянная.

2. Существуют такие постоянные $B>0$ и $\beta>0$, что $(\int_0^1 |g_i(t+h)-g_i(t)|^2\,dt)^{1/2} \leqslant B|h|^\beta$, $i=1,\dots,n$.

3. $\det R \neq 0$, где R — матрица с элементами

$$\beta_{ij} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g_i(T^k t)\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} g_j(T^k t)\right) d\mu(t).$$

Пусть

$$P_n(M) = \mu\left\{t\colon 0<t<1,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} \overline{g}(T^k t) \in M\right\},$$

где M — выпуклое измеримое множество из m-мерного евклидова пространства R_m.

В перечисленных условиях, с помощью метода «последовательных приближений» (см. [2], [3]) доказана следующая многомерная предельная теорема.

Теорема. *Справедлива оценка* $\sup_M |P_n(M)-\Phi_R(M)| \leqslant An^{-1/2+\varepsilon}$, *где* ε — *сколь угодно малое положительное число*; A *зависит от* m, C, B *и минимального собственного числа матрицы* R; Φ_R — *многомерное нормальное распределение с матрицей ковариаций* R *и нулевым средним.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Renyi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties. — Act. Math. Acad. Sci. Hungar., 1957, v. 8, p. 477–493.
2. *Дубровин В. Т.*, *Москвин Д. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с перемешиванием. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 3, с. 553–564.
3. *Дубровин В. Т.*, *Москвин Д. А.* Вероятности больших уклонений сумм функций от последовательностей с перемешиванием. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 4, с. 840–846.