М. А. К о з и н (Ульяновск, УлГУ). **Метод вычисления логарифмической функции правдоподобия и ее градиента.**

Введение. Наиболее мощным инструментом моделирования адаптивных систем являются статистические методы, использующие логарифмическую функцию правдоподобия (ЛФП) и ее градиент (ГЛФП). В работе, представленной в данном сообщении, будут рассмотрены новые алгоритмы вычисления ЛФП и ГЛФП, построенные на основе совмещенных квадратно-корневых реализаций фильтра Калмана.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную дискретную стохастическую систему

$$x_{t+1} = F_t x_t + G_t w_t, \quad z_t = H_t x_t + v_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, N,$$

где $x_t \in \mathbf{R}^n$, $z_t \in \mathbf{R}^m$, $w_t \in \mathbf{R}^q$, $F_t(\theta) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $G_t(\theta) \in \mathbf{R}^{n\times q}$, $H_t(\theta) \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\{w_t\}$ и $\{v_t\}$ — независимые нормально распределенные последовательности шумов с нулевыми средними и ковариациями $Q_t(\theta) \in \mathbf{R}^{q\times q}$ и $R_t(\theta) \in \mathbf{R}^{m\times m}$. Начальное значение вектора состояния системы $x_0 \sim N(\overline{x}_0, \Pi_0)$. При этом $F_t(\theta)$, $H_t(\theta)$, $Q_t(\theta)$, $R_t(\theta)$ — достаточно гладкие функции относительно параметра $\theta \in \mathbf{R}^p$.

Вычисление функции правдоподобия. ЛФП может быть представлена в виде

$$L_\theta(Z_1^N) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\left\{\frac{m}{2}\ln(2\pi) + \ln\left(2\det\left(R_{e,t}^{1/2}\right)\right) + \overline{e}_t^T\overline{e}_t\right\}$$

и может быть вычислена из блоков матриц на каждом шаге расширенного квадратно-корневого ковариационного и информационного алгоритмов.

Вычисление градиента функции правдоподобия. Представим производную каждого слагаемого ЛФП по θ_i в виде

$$\frac{\partial l}{\partial\theta_i} = \operatorname{tr}\left[R_{e,t}^{-1/2}\frac{\partial(R_{e,t}^{1/2})}{\partial\theta_i}\right] + \overline{e}_t^T\frac{\partial\overline{e}_t}{\partial\theta_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

На каждом алгоритма будем параллельно вычислять

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(R_{e,t}^{1/2}\right) & \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\overline{K}_{p,t}^T\right) & | & -\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\overline{e}_t) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(P_{t+1}^{1/2}\right) & | & \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(P_{t+1}^{-T/2}\overline{x}_{t+1}\right) \\ 0^{[1]} & o^{[1]} & | & \frac{\partial}{\partial\theta_i}(\gamma^{[1]}) \end{bmatrix} = \left[\left(L_i\right)^T + D_i + U_i\right]$$

$$\times\begin{bmatrix} R_{e,t}^{1/2} & \overline{K}_{p,t}^T & | & -\overline{e}_t \\ 0 & P_{t+1}^{1/2} & | & P_{t+1}^{-T/2}\overline{x}_{t+1} \\ 0^{[1]} & 0^{[1]} & | & \gamma^{[1]} \end{bmatrix},$$

при этом $L_i + D_i + U_i$ — разложение матрицы $(\partial A_t/\partial\theta_i)R_t$, где A_t и $R_t = O_t A_t$ — соответствующие матрицы квадратно-корневой ковариационной реализации фильтра Калмана, приведенные к квадратному виду путем удаления последних строк.

Аналогичным образом можно построить вычисление ГЛФП на основе информационного алгоритма. Показанный алгоритм отличается меньшим числом арифметических операций, а также операций по обращению матриц, ориентацией на параллельные вычисления, а также устойчивостью по отношению к ошибкам округления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Park P.*, *Kailath T.* New Square-Root Algorithms for Kalman Filtering. — IEEE Trans. Automat. Control, 1995, v. 40, № 5, p. 895–899.
2. *Bierman G. J.*, *Belzer M. R.*, *Vandergraft J. S.*, *Porter D. W.* Maximum likelihood estimation using square root information filters. — IEEE Trans. Automat. Control, 1990, v. 35, № 12, p. 1293–1298.