Е. Р. Колясникова (Уфа, УГАТУ). **Хеджирующая стратегия в модели (B, S, F) -рынка.**

Рассматривается биномиальная модель рынка, состоящего из акции, безрискового актива (БА), потока платежей $((B, S, F)$ -рынок). Данная модель является обобщением модели (B, S) -рынка. Все ценовые значения приведены к начальному моменту по ставке доходности БА, начальная цена БА равна 1. Таким образом, его цена в любой момент равна 1. В зависимости от предьстории цена акции принимает одно из двух возможных значений (структура бинарного дерева). Для каждого момента, кроме нулевого, задан элемент потока платежей. Момент времени, соответствующий вершине бинарного дерева i , равен $t(i) = \text{int}(\log_2(i + 1))$, цена акции равна C_i , количество акций и БА равно y_i и x_i соответственно, элемент потока платежей в этот момент равен $P_{t(i)}$. Пусть на множестве терминальных вершин дерева задана платежная функция F_i ($i = 2^n - 1, \dots, 2^{n+1} - 2$). Полагаем, что за займы активов предусмотрена плата. При займе x единиц БА следует через единицу времени вернуть λx единиц БА, при займе y акций следует вернуть μy акций ($\lambda, \mu > 1$). Считаем, что выполняются условия самофинансирования:

$$\begin{cases} v_i + C_{2i+1}u_i + P_{t(i)+1} = x_{2i+1} + C_{2i+1}y_{2i+1}, \\ v_i + C_{2i+2}u_i + P_{t(i)+1} = x_{2i+2} + C_{2i+2}y_{2i+2}, \end{cases} \quad i = 0, \dots, 2^{n-1} - 2. \quad (1)$$

Рассматривается задача (1)–(4) формирования начального портфеля минимальной стоимости и хеджирующей стратегии, обеспечивающей значение платежной функции не меньше заданной.

$$x_0 + C_0y_0 + \sum_{k=1}^n P_k \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\begin{cases} v_i + C_{2i+1}u_i + P(t(i) + 1) \geq F_{2i+1}, \\ v_i + C_{2i+2}u_i + P(t(i) + 1) \geq F_{2i+2}, \end{cases} \quad i = 2^{n-1} - 1, \dots, 2^n - 2. \quad (3)$$

Для i -й вершины ($i = 0, \dots, 2^n - 2$) есть одна из возможностей:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_i \leq 0, \quad u_i = \mu y_i, \quad v_i \geq 0, \quad v_i = x_i, \quad 2) \quad u_i \leq 0, \quad u_i = \mu y_i, \quad v_i \leq 0, \quad v_i = \lambda x_i, \\ 3) \quad & u_i \geq 0, \quad u_i = y_i, \quad v_i \geq 0, \quad v_i = x_i, \quad 4) \quad u_i \geq 0, \quad u_i = y_i, \quad v_i \leq 0, \quad v_i = \lambda x_i. \end{aligned} \quad (4)$$

При временном горизонте n необходимо решить $4^{2^n - 1}$ задачи линейного программирования. Предложен алгоритм, сокращающий количество решаемых задач. Так как $u_i = \min\{y_i, \mu y_i\}$, $v_i = \min\{x_i, \lambda x_i\}$ при $\mu \geq 1$, $\lambda \geq 1$, заменим условия (4):

$$u_i \leq y_i, \quad u_i \leq \mu y_i, \quad v_i \leq x_i, \quad v_i \leq \lambda x_i. \quad (5)$$

В результате решается задача (1)–(3), (5). Полученное решение проверяется на выполнение условий (6):

$$u_i = \begin{cases} y_i, & \text{при } y_i \geq 0, \\ \mu y_i, & \text{при } y_i \leq 0, \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} x_i, & \text{при } x_i \geq 0, \\ \lambda x_i, & \text{при } x_i \leq 0, \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 2. \quad (6)$$

Если (6) нарушается, то задача разветвляется на две. Устраняем нарушения по v_i или u_i в соответствии с (6). В результате получается бинарное дерево задач. Процесс продолжается, пока (6) не будет выполнено для всех вершин дерева задач или решения не существует. Выбираем хеджирующую стратегию, обеспечивающую минимальную стоимость портфеля среди всех терминальных вершин дерева.

Теорема. Алгоритм обеспечивает точное решение задачи. При нулевом потоке платежей стоимость начального портфеля S_0 является конечной тогда и только тогда, когда $S_0 = x_0 + C_0 y_0 > 0$ при $F_i \geq 0$, $\sum_i F_i > 0$, $i = 2^n - 1, \dots, 2^{n+1} - 2$.

Результаты: проведено 100 вычислительных экспериментов, рассматривались рынки, для которых решение исходной задачи существует, при временном горизонте $n = 3$ вместо 16384 решалось в среднем 302 задачи.