П. В. Лысухо, Е. Ю. Панов (Великий Новгород, НовГУ). **О существовании и единственности неограниченных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных законов сохранения первого порядка.**

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \mathrm{div}_x \varphi(u) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T = (0,T) \times \mathbf{R}^n$, $T > 0$, с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n). \tag{2}$$

Предполагается, что $|\varphi'(u)| \leqslant \Phi(|u|)$, где $|\cdot|$ обозначает евклидову норму, а $\Phi(r)$ — такая строго возрастающая функция на $\mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$, что $\Phi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Напомним определение обобщенного энтропийного решения (о. э. р.) задачи (1), (2) в смысле С. Н. Кружкова [1].

Определение. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty_{loc}(\Pi_T)$ называется *о. э. р. задачи* (1), (2), если для всех $k \in \mathbf{R}$: $|u-k|_t + \mathrm{div}_x[\mathrm{sign}(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leqslant 0$ в $D'(\Pi_T)$ и $\operatorname{ess\,lim}_{t\to 0+} u(t,\cdot) = u_0$ в $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$.

Как показано впервые в [2], в классе локально ограниченных о. э. р. классические результаты Кружкова [1] о существовании и единственности о. э. р. нарушены. В этой связи актуальна задача выделения классов корректности среди локально ограниченных о. э. р. задачи (1), (2). Пусть $\rho(r) \in C(\mathbf{R}_+)$, $\rho(r) \geqslant 1$, $\int^{+\infty} dr/\rho(r) = \infty$. Введем пространство

$$B^\rho_\Phi = \{u(t,x) \in L^\infty_{loc}(\Pi_T) \,|\, \exists c = c(t) \in L^\infty_{loc}([0,T))\ \Phi(|u(t,x)|) \leqslant c(t)\rho(|x|)\}.$$

Теорема 1. *О. э. р. $u(t,x) \in B^\rho_\Phi$ задачи* (1), (2) *единственно.*

Для доказательства существования о. э. р. задачи (1), (2) определим следующие классы (соответствующие $\rho(r) = 1 + r$):

$$B_\Phi = \{u(t,x) \in L^\infty_{loc}(\Pi_T) \,|\, \exists c = c(t) \in L^\infty_{loc}([0,T))\ \Phi(|u(t,x)|) \leqslant c(t)(|x|+1)\},$$

$$B^0_\Phi = \{u_0(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n) \,|\, \exists C > 0\ \Phi(|u_0(x)|) \leqslant C(|x|+1)\},$$

$$\dot{B}^0_\Phi = \{u_0(x) \in B^0_\Phi \,|\, \operatorname{ess\,lim}_{|x|\to\infty} \Phi(|u_0(x)|)\,|x|^{-1} = 0\}.$$

В случае степенной функции $\Phi(r) = r^\alpha$ классы B_Φ, B^0_Φ также определяются степенными оценками $|u| \leqslant c(|x|+1)^\alpha$, $\alpha = 1/p$. В этом случае результаты о существовании и единственности о. э. р. задачи (1), (2) установлены в [3], где также показано, что показатель α является точным: при его увеличении теряется как существование, так и единственность о. э. р.

Теорема 2. *Пусть $u_0(x) \in B^0_\Phi$. Тогда в некотором слое Π_T существует о.э.р. $u(t,x) \in B_\Phi$ задачи* (1), (2)*. При этом, если $u_0(x) \in \dot{B}^0_\Phi$, то можно положить $T = +\infty$, т. е. решение существует во всем полупространстве $t > 0$.*

Условия теоремы 2 являются точными, что подтверждается примерами. Заметим, что при условии $\rho(r)/(1+r) \to \infty$ при $r \to \infty$ (например, при $\rho(r) = (1+r)\ln(3+r)$) B_Φ строго содержится в B^ρ_Φ. Сравнение условий теорем 1 и 2 показывает, что имеется «зазор» между классами существования и классами единственности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными. — Матем. сборник, 1970, т. 81, № 2, с. 228–255.
2. *Горицкий А. Ю.*, *Панов Е. Ю.* О локально ограниченных обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. — Труды МИАН им. В.А. Стеклова, 2002, т. 236, с. 120–133.
3. *Панов Е. Ю.* О классах корректности локально ограниченных обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка. — Фундаментальная и прикладная математика, 2006, т. 12, № 5, с. 175–178.