

В. Н. Клячкин, А. Л. Пискунова (Ульяновск, УлГТУ). **Оценка эффективности контрольной карты обобщенной дисперсии.**

При контроле многопараметрического технологического процесса основная характеристика рассеяния — ковариационная матрица. Для проверки гипотезы о равенстве ковариационной матрицы процесса Σ целевой матрице Σ_0 Ф. Апаризи [1] предложил использовать контрольные карты обобщенной дисперсии — определителя ковариационной матрицы. На карте откладываются выборочные значения обобщенной дисперсии $|S_t|$ для каждой t -й выборки, $t = 1, \dots, m$. Элементы выборочной ковариационной матрицы S_t определяются по формулам

$$s_{jkt} = \frac{1}{n-1} \sum (x_{ijt} - \bar{x}_{jt})(x_{ikt} - \bar{x}_{kt}).$$

По оценкам средней ковариации по j -му показателю $\bar{s}_{jk} = m^{-1} \sum_{t=1}^m s_{jkt}$ строится матрица S ; ее определитель $|S|$ является оценкой целевой обобщенной дисперсии $|\Sigma_0|$.

Положение контрольных границ карты обобщенной дисперсии по Апаризи находится с помощью формулы $\mu_{|S|} \pm 3\sigma_{|S|}$, где $\mu_{|S|} = b_1|\Sigma_0|$, $\sigma_{|S|} = \sqrt{b_2}|\Sigma_0|$,

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{j=1}^p (n-j), \quad b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{j=1}^p (n-j) \left[\prod_{k=1}^p (n-k+2) - \prod_{k=1}^p (n-k) \right],$$

тогда контрольные границы

$$\left. \frac{UCL}{LCL} \right\} = |S| \left(b_1 \pm 3\sqrt{b_2} \right).$$

Характеристика эффективности карты — средняя длина серий может быть найдена по формуле [2]:

$$L(\delta) = [\Phi(\delta\sqrt{n}) - u_{1-\alpha/2}] + \Phi(-\delta\sqrt{n} - u_{1-\alpha/2})^{-1},$$

где δ — относительное смещение среднего уровня обобщенной дисперсии (в долях от стандартного отклонения $\sigma_{|S|}$).

Следуя Апаризи, введем в качестве характеристики превышения фактической обобщенной дисперсии $|\Sigma|$ над целевой $|\Sigma_0|$ отношение $d = |\Sigma|/|\Sigma_0|$. Положение средней линии карты со смещением определяется зависимостью $b_1|\Sigma|$, а карты в стабильном состоянии — $b_1|\Sigma_0|$; тогда $\delta\sigma_{|S|} = b_1|\Sigma| - b_1|\Sigma_0|$; откуда $\delta = b_1(d-1)/\sqrt{b_2}$, тогда средняя длина серий

$$L(d) = \left[\Phi\left(\frac{b_1(d-1)}{\sqrt{b_2}}\sqrt{n} - u_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(-\frac{b_1(d-1)}{\sqrt{b_2}}\sqrt{n} - u_{1-\alpha/2}\right) \right]^{-1}.$$

Полученная зависимость позволяет проанализировать эффективность карты обобщенной дисперсии в зависимости от различных характеристик процесса контроля: объема выборок n , количества выборок m , использованных для оценки положения границ карты, числа контролируемых параметров p и т. п.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-08-97004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aparisi F., Jabaloyes J., Carrion A.* Statistical properties of the $|S|$ multivariate control chart. — Comm. in Statistics — Theory and Methods, 1999, v. 28, № 11, p. 2671–2686.
2. *Клячкин В. Н.* Многомерный статистический контроль технологического процесса. М.: Финансы и статистика, 2003, 192 с.