

**В. Н. К л я ч к и н, В. А. С а ф и н** (Ульяновск, УлГТУ). **Идентификация параметров контрольной карты Хотеллинга с учетом погрешностей измерений.**

Предположим, что при контроле  $p$  показателей процесса  $X_1, X_2, \dots, X_p$  имеют место систематические погрешности, заданные вектором  $C = (C_1, C_2, \dots, C_p)^T$ . Проанализируем, как это отразится на параметрах карты Хотеллинга: для  $t$ -й выборки ( $t = 1, \dots, m$ ) рассчитывается статистика  $T_t^2 = n(\bar{X}_t - \mu_0)^T S^{-1}(\bar{X}_t - \mu_0)$ , где  $n$  — объем выборки,  $S$  — оценка ковариационной матрицы  $\Sigma$ ,  $\bar{X}_t$  — вектор средних в выборках,  $\mu_0$  — вектор целевых средних, заданный техническими условиями. Значение статистики Хотеллинга с учетом систематической погрешности  $T_t^{e2} = n((\bar{X}_t + C) - \mu_0)^T S^{-1}((\bar{X}_t + C) - \mu_0)$  может существенно отличаться от фактического значения  $T_t^2$ . При нормальном ходе процесса должно выполняться условие  $T_t^2 < T_{kp}^2$ , где  $T_{kp}^2$  — граница критической области.

При оценивании компонент ковариационной матрицы по выборкам граница критической области определяется по формуле

$$T_{kp}^2 = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{1-\alpha}(p, mn - m - p + 1),$$

где  $F_{1-\alpha}(k_1, k_2)$  — квантиль  $F$ -распределения Фишера порядка  $1 - \alpha$  с числами степеней свободы в числителе  $k_1$ , в знаменателе —  $k_2$ .

Средняя длина серий карты Хотеллинга в зависимости от параметра нецентральности  $\lambda^2 = n(\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0)$ , характеризующего нарушение процесса, определяется по формуле  $L(\lambda) = [1 - \int_0^{T_{kp}^2} f(t) dt]^{-1}$ , где  $f(t)$  — плотность распределения.

Обозначим  $\Delta_j = \mu_j - \mu_{0j}$  смещение процесса по  $j$ -му показателю: параметр нецентральности с учетом погрешности измерений  $\lambda_c^2 = n(\Delta + C)^T \Sigma^{-1}(\Delta + C)$ .

Будем задавать  $\Delta_j$  в долях от стандартного отклонения:  $\Delta_j = \delta_j \sigma_j$ . Подобным образом представим и погрешность:  $C_j = c_j \sigma_j$ . На рис. показаны кривые при  $p = 2$ ,  $\alpha = 0,005$ ; систематическая погрешность только по первому показателю (кривая 1 — при  $c_1 = 0$ , кривая 2 — при  $c_1 = 0,25$ , кривая 3 — при  $c_1 = 0,5$ ). Видим, что погрешность наблюдений привела к изменению фактического уровня значимости: если при  $\lambda = 0$  и отсутствии погрешности  $c_1 = 0$  возможна одна ошибка на 200 наблюдений ( $L(0) = 200$ ), то  $L(0) = 103$  при  $c_1 = 0,25$ ,  $L(0) = 33$  при  $c_1 = 0,5$ , что совершенно недопустимо. Таким образом, наличие систематической погрешности приводит к существенному снижению фактического уровня значимости.

Чтобы фактический уровень значимости соответствовал заранее заданному значению  $\alpha_0$  (как правило, при многомерном контроле принимают  $\alpha_0 = 0,005$ ) необходимо найти такое значение  $\alpha$ , которое бы обеспечило заданную вероятность ложной тревоги  $1/\alpha_0$ : численно решается уравнение  $L(0, \alpha) = 1/\alpha_0$ . Найденное значение  $\alpha$  используется для расчета положения контрольной границы карты Хотеллинга.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-08-97004.