С. О. С и н и ц ы н (Москва, МГУПС). **Уравнение Фоккера–Планка в задаче случайных колебаний полумаятника.**

Рассмотрим уравнение движения, описываемое системой первого порядка, подверженной действию узкополосного шума [1] $x' + \alpha x = \lambda\cos(y(t))$, $y' = \omega + \xi$. Здесь ξ — гауссовский белый шум. Соответствующее уравнение Фоккера–Планка (ФП) имеет вид $p'_t - \alpha(x\,p)'_x + \lambda\cos(y)p'_x + \omega p'_y - \varepsilon p''_{yy} = 0$. Здесь α — аналог коэффициента трения, $\varepsilon = d/2 < 1$ — коэффициент диффузии в безразмерном виде, λ, ω — заданные константы. Решение строится на базе нового свойства дифференциальных уравнений в частных производных, обнаруженного в [2]–[3]. Сделаем в уравнении ФП произвольную замену переменных $p(x,t)\Big|_{x=x(\xi,\delta),\ y=y(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta)$. Предположим, что якобиан замены переменных $\det J = x'_\xi y'_\delta - y'_\xi x'_\delta \neq 0$ не равен нулю и бесконечности. Тогда существует, хотя бы локально, обратное преобразование $\xi = \xi(x,y)$, $\delta = \delta(x,y)$. При этом $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \det J\frac{\partial\delta}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\det J\frac{\partial\delta}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial \delta} = -\det J\frac{\partial\xi}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial \delta} = \det J\frac{\partial\xi}{\partial x}$.

Пусть $\frac{\partial p}{\partial x}|_{x=x(\xi,\delta),\ y=y(\xi,\delta)} = R(\xi,\delta)$, $\frac{\partial p}{\partial y}|_{x=x(\xi,\delta),\ y=y(\xi,\delta)} = T(\xi,\delta)$. Вычислим левые части этих выражений, используя произведенную замену переменных. Получим выражения

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = R(\xi,\delta)\det J, \quad \left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = T(\xi,\delta)\det J. \qquad (1)$$

Уравнение ФП после аналогичных подстановок имеет вид

$$\varepsilon(x'_\xi T'_\delta - x'_\delta T'_\xi)\Big/\det J + T\omega + R(\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta)) - \alpha U(\xi,\delta) = 0. \qquad (2)$$

Дополним эти соотношения равенством смешанных производных $p''(x(\xi,\delta),y(\xi,\delta))_{xy} = p''(x(\xi,\delta),y(\xi,\delta))_{yx}$.

Это соотношение аналогично выше изложенному можно переписать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}R + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}R - \frac{\partial y}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}T + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}T = 0. \qquad (3)$$

Исследование условий разрешимости системы (1)–(3) проводится в два этапа. Как показано в [2]–[3] система является линейной алгебраической системой относительно производных x'_ξ, x'_δ, y'_ξ, y'_δ.

Теорема 1. *Внешне нелинейная алгебраическая система* (1)–(2) *относительно производных* x'_ξ, x'_δ, y'_ξ, y'_δ *является СЛАУ, разрешима и имеет решение*

$$x'_\xi = g_1(\xi,\delta,x(\xi,\delta),y(\xi,\delta)), \quad x'_\delta = g_2(\xi,\delta,x(\xi,\delta),y(\xi,\delta)),$$

$$y'_\xi = g_3(\xi,\delta,x(\xi,\delta),y(\xi,\delta)), \quad y'_\delta = g_4(\xi,\delta,x(\xi,\delta),y(\xi,\delta)),$$

где $g_1 = [(\varepsilon TT'_\xi + (\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta))RU'_\xi)(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi)]/P_1$,
$g_2 = [\varepsilon TT'_\delta + R(\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta))U'_\delta](T'_\delta U'_\xi - U'_\delta T'_\xi)\Big/P_1$,
$g_3 = \{\varepsilon T(R'_\delta T'_\xi - T'_\delta R'_\xi)U'_\xi + +R[U'_\xi(\varepsilon T'_\delta T'_\xi(\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta))R'_\delta U'_\xi) - U'_\delta(\varepsilon(T'_\delta)^2 + (\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta))R'_\xi U'_\xi)]\}/P_1$,
$g_4 = -\{\varepsilon T(T'_\delta R'_\xi - R'_\delta T'_\xi)U'_\delta + R[(\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta))R'_\xi(U'_\delta)^2 - - \varepsilon U'_\xi(T'_\delta)^2 + U'_\delta(\varepsilon T'_\delta T'_\xi + (-\lambda\cos(y(\xi,\delta)) + \alpha x(\xi,\delta))R'_\delta U'_\xi)]\}/P_1$, *где* $P_1 = [T^2\varepsilon(-T'_\delta R'_\xi + R'_\delta T'_\xi) - RT(\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta))(U'_\delta R'_\xi - R'_\delta U'_\xi) + R^2(\lambda\cos(y(\xi,\delta)) - \alpha x(\xi,\delta))(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi)]$.

Необходимое условие разрешимости новой системы, приведенной в теореме 1, имеет вид двух равенств смешанных производных $(x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi})\Big|_{x'=g_1,x'_\delta=g_2,y'=g_3,y'_\delta=g_4}$,

$(y''_{\xi\delta}=y''_{\delta\xi})\Big|_{x'=g_1,x'_\delta=g_2,y'=g_3,y'_\delta=g_4}$. Свойство, обнаруженное в [2]–[3], в данном конкретном случае сформулировано в следующем утверждении.

Теорема 2. 1) *Имеет место тождество* $[[((g_1)'_\delta-(g_2)'_\xi)/T]\equiv[((g_3)'_\delta-(g_4)'_\xi)/R]]\Big|_{x'=g_1,x'_\delta=g_2,y'=g_3,y'_\delta=g_4}$ *для любых дважды дифференцируемых функций* $R(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$. 2) *Два условия разрешимости имеют вид одного соотношения на три неизвестные функции* $U(\xi,\delta)$, $R(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$, *а именно*

$$[[g_3]'_\delta-[g_4]'_\xi]\Big|_{(x'_\xi=g_1,x'_\delta=g_2,y'_\xi=g_3,y'_\delta=g_4)}=0.$$

Описанное свойство позволяет конструировать новые решения. Заметим, что переменная y входит в уравнение ФП нелинейно, поэтому описываемый метод нефиксированной замены переменных позволяет построить решение. Будем искать функции $R(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$, $x(\xi,\delta)$ в виде отрезков рядов с неопределенными коэффициентами различной длины, например, $R(\xi,\delta)=\sum_{i=1}^{n}U^iK_i(y(\xi,\delta))$, Здесь $K_i(y(\xi,\delta))$ — неизвестные функции, подлежащие определению. Анализируя условие разрешимости, приведенное в теореме 2, можно видеть, что здесь существует новое семейство решений и имеется много вариантов. Приведем один из них. В остальных, более сложных, случаях решение остается записанным в параметрической форме. После подстановки всех производных функций $R(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$, $x(\xi,\delta)$ в условие разрешимости и очевидных упрощений (выделение сомножителей) получим, что оно обращается в тождество если обращаются в тождества два ОДУ на два коэффициента $k(y(\xi,\delta)),l(y(\xi,\delta))$: $\varepsilon k(y)k''(y)-2\varepsilon(k'(y))^2-\omega k(y)k'(y)-2\alpha k^2(y)=0$, $\varepsilon k(y)l''(y)-2\varepsilon k'(y)l'(y)-\omega k(y)l'(y)-\alpha k(y)l(y)+\lambda\cos(y)k(y)=0$. Их решения имеют вид $k(y)=C_3\exp(-y\omega/(2\varepsilon))\sec[\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2}(y+\varepsilon C_0)/(2\varepsilon)]$, $l(y)=\{\exp(-y\chi/2)[2(\varepsilon^2-6\alpha\varepsilon+\alpha^2+\omega^2)\times[C_1\chi+C_2\exp(y\chi)]+\ +\exp(y\chi/2)\lambda\ \chi[(\varepsilon+\alpha+\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2})\cos\beta_-+(\varepsilon+\alpha-\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2})\cos\beta_+]\sec(\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2}(y+\varepsilon C_0)/(2\varepsilon))\}/(2\chi(\varepsilon^2-6\alpha\varepsilon+\alpha^2+\omega^2))$, где $\chi=\frac{\sqrt{\omega^2-4\alpha\varepsilon}}{\varepsilon}$, $\beta_+=(C_0\varepsilon\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2}+y(2\varepsilon+\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2}))/(2\varepsilon)$, $\beta_-=(C_0\varepsilon\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2}+y(-2\varepsilon+\sqrt{8\alpha\varepsilon-\omega^2}))/(2\varepsilon)$.

Тогда имеем $T=-(Uk'(y)+l'(y))/k(y)$, $R=1/k(y)$, $x=l(y)+Uk(y)$. В данном случае можно вернуться в исходные переменные. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Точное решение уравнения ФП имеет вид* $Z(x,y,t)=(x-l(y))/k(y)$, *где функции* $k(y)$, $l(y)$ *определены выше.*

Автор выражает благодарность д. ф.-м. н., профессору К. А. Волосову за полезные советы и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрченко Д. В.* Оптимальное управление и математическое моделирование в стохастических задачах механики. Дис. на соискание уч. ст. доктора физ.-матем. наук. М.: МИИТ, 2006.
2. *Волосов К. А.* Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными. — Сиб. ж. индустр. матем., 2008, т. 11, № 2 (34), с. 29–39.
3. *Волосов К. А.* Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами. Дис. на соискание уч. ст. доктора физ.-матем. наук. М.: МИЭМ, 2007. Диссертация выставлена на сайте «Мир дифференциальных уравнений», http://eqworld.ipmnet.ru.