С. В. С т р е л к о в (Москва, МЭСИ)**. Аппроксимация вероятности разорения в моделях Stop–Loss.**

В работе, представленной данным сообщением, рассмотрен подход к оценке вероятности разорения в процессах риска с экстремально распределенными величинами убытков, усеченными за счет страхования, на основе модифицированной аппроксимации Крамера–Лундберга. Основой работы послужили исследования H. Schmidli асимптотики вероятности разорения в моделях страхования [4].

Рассмотрим процесс риска $R_t = u + c_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, где R_t — величина гарантийного капитала в момент времени t, $u > 0$ — начальный гарантийный капитал (R_0), c_t — приближение ступенчатой функции дохода рассматриваемого вида бизнеса в момент времени t, $\{N_t\}$ — процесс восстановления с интенсивностью λ (случайные величины $\theta = T_i - T_{i-1}$ независимы и одинаково распределены, $\{T_i\}$ — моменты наступления убытков), $\{Y_i\}$ — величина убытков, происходящих в i-й момент скачка процесса $\{N_t\}$; $\{Y_i\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(x)$. Предполагается, что $\{N_t\}$ и $\{Y_i\}$ независимы.

Определим момент разорения ([1], [2], [4]) соотношением $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon\ R_t < 0\}$, будем далее рассматривать вероятность разорения $\Psi(u) = \mathbf{P}\{\tau < \infty\}$.

При существовании экспоненциальных моментов распределения величины (severity) убытков: найдется такое $R \in \mathcal{R}$, что $\int_0^\infty e^{Rs}[1 - G(x)]\,dx = 1$, выполняется [1], следующая аппроксимация (Крамера–Лундберга) вероятности разорения: $\underline{C}e^{-Rs} \leqslant \Psi(x) \leqslant \overline{C}e^{-Rs}$, где

$$\underline{C} = \inf_{y>0} K, \quad \overline{C} = \sup_{y>0} K, \quad K = e^{-Ru}[1 - G(y)]\Big(\int_y^\infty e^{Rz}\,dG(z)\Big)^{-1}$$

(при этом R называется *характеристическим коэффициентом Крамера–Лундберга*).

Для некоторых распределений, известных из EVT (Парето, логнормальное, Фреше и др.), распространенных в теории риск-менеджмента [3], благодаря своим «тяжелым хвостам» (наилучшим образом описывающих редкие, но значительные убытки), условие Крамера–Лундберга не выполняется ($\mathbf{E}\,[e^{Ry}] = \infty$). Общепринятой практикой минимизации убытков от событий такого рода (катастрофических) является применение механизмов страхования.

Предположим, что убыток Y застрахован с приоритетом a, т. е. в случае его наступления выплачивается страховое возмещение в размере $\max\{Y - a, 0\}$ (данный вид страхования называется *страхованием эксцендента убытка* — Stop–Loss [4]). Тогда определенный выше процесс риска можно переписать в следующем непрерывном виде: $R_t^a = u + \int_0^t c(a_s)\,ds - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \wedge a_{Ti}$. Вероятность разорения для данного процесса может быть получена из следующего уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\inf_{a\in[0,\infty]} c(a)\psi'(x) + \lambda\bigg[\int_0^\infty \psi(x - (y \wedge a))\,dG(y) - \psi(x)\bigg] = 0,$$

характеристический коэффициент R для которого можно найти из уравнения $\inf_{a\in[0,\infty]} \int_0^a \lambda(1 - G(x))e^{Rs}\,dx - c(a) = 0$. Корректность и единственность такого подхода обоснована в [4] (Verification Theorem by H. Schmidli). В заключение хотелось бы отметить, что вышеописанный подход численно реализован автором в пакете MATLAB.

Автор выражает признательность к.т.н. Мастяевой И.Н. за помощь в подготовке сообщения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калашников В., Константинидис Д.* Вероятность разорения. — Фундаментальная и прикл. матем., 1996, т. 2, в. 4.
2. *Королев В. Ю.*, *Бенинг В. Е.*, *Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.
3. *Panjer H.* Operational risk: modeling analytics. John Wiley & Sons, 2006.
4. *Schmidli H.* Asymptotics of ruin probabilities for risk processes under optimal reinsurance and investment polices: the large claim case. — Queueing Syst. Theory Appl., 2004.