Д. Е. Ш а ф р а н о в (Челябинск, ЮУрГУ). **Задача Коши для неоднородного уравнения свободной поверхности фильтрующейся жидкости в пространстве k-форм, определенных на римановом многообразии.**

Уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f \tag{1}$$

описывает эволюцию форму свободной поверхности жидкости, фильтрующейся в пласте ограниченной мощности [1]. Здесь действительные параметры α, β и λ характеризуют среду, причем $\alpha, \beta > 0$, свободный член $f = f(x)$ соответствует источникам (стокам) жидкости.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) в пространстве гладких k-форм, определенных на Ω_n — n-мерном ориентированном гладком (т. е. класса C^∞) компактном связном римановом многообразии без края. Редуцируем эту задачу при помощи теории гармонических полей Кодаиры и разложения Ходжа к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

для уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{3}$$

Теорема 1 [2]. *Пусть оператор L-секториален. Тогда существуют аналитические и равномерно ограниченные разрешающие полугруппы уравнений*

$$R_\mu^L(M)\dot{u} = (\mu L - M)^{-1}Mu, \quad L_\mu^L(M)\dot{f} = M(\mu L - M)^{-1}f,$$

эквивалентных уравнению (3), *представимые интегралами Данфорда–Тейлора*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}\,d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L_\mu^L(M)e^{\mu t}\,d\mu,$$

где контур $\Gamma \subset S_{\nu,\theta}^L(M)$.

Обозначим $\mathbf{H}^k \equiv \mathbf{H}^k(\Omega_n)$, $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{n+1} = \{0\}$ линейное пространство гладких k-форм на многообразии Ω_n. Формулой $(\alpha,\beta)_0 = \int_{\Omega_n} \alpha\wedge *\beta, \alpha, \beta \in \mathbf{H}^k$, где $*$ — оператор Ходжа, определим скалярное произведение на $\mathbf{H}^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, а соответствующую норму обозначим $\|\cdot\|_0$. Пополнение пространства $\mathbf{H}^k$ по норме $\|\cdot\|_0$ обозначим $\mathfrak{H}_k^0$. Аналогично получаем пространства $\mathfrak{H}_k^2$, $\mathfrak{H}_k^4$.

Обозначим $\{\lambda_l\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами, занумерованную по невозрастанию с учетом кратности, $\{\varphi_l\}$ — ортонормированную последовательность собственных функций.

Зададим операторы L и M формулами $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathrm{Cl}\,(\mathcal{U};\mathcal{F})$ действует из пространства $\mathcal{U} = \mathfrak{H}_k^4$ в пространство $\mathcal{F} = \mathfrak{H}_k^2$. Тем самым редуцировали задачу Коши для уравнения (1) к задаче Коши (2) для уравнения соболевского типа (3).

Лемма. *Для любого $\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ оператор M L-секториален.*

Из леммы и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *При любых $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\lambda \neq \alpha/\beta$, $f \in \mathfrak{H}_k^2$ и u_0 из фазового пространства существует единственное решение задачи Коши* (1)–(2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дзекцер Е. С.* Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью. — Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 5, с. 1031–1033.
2. *Свиридюк Г.А.*, *Федоров В.Е.* О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами. — Сиб. матем. журнал, 1998, т. 39, № 3, с. 604–616.
3. *Шафранов Д.Е.* О задаче Коши для уравнения свободной поверхности фильтрующейся жидкости на многообразии. — Вестник ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование», 2008, в. 2, № 27 (127), с. 117–120.