**О. В. Русаков** (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Процессы случайного индекса: структура зависимости.**

Определим понятие процесса случайного индекса в общем случае. Пусть $(\xi) = \dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$ — некоторая последовательность случайных величин; $X(s)$ ($s \in \mathbf{R}$) — точечный случайный процесс, который мы будем понимать как считающую меру интервалов. Процессом случайного индекса $\Psi(s)$ назовем субординацию для последовательности $(\xi)$, выполненную посредством процесса $X$, т. е. $\Psi(s) = \xi_{\Psi(s)}$, $s \in \mathbf{R}$.

Механизм формирования модели процесса случайного индекса следующий. При целых $k$ рассмотрим $s_k < s_{k+1}$ — две последовательные точки точечного процесса $X(s)$. Случайный интервал $[s_k, s_{k+1})$ — спейсинг процесса $X$, маркируется случайной величиной $\xi_k$, т. е. каждой точке $k$-го спейсинга процесса $X$ приписывается зависящая только от номера этого интервала случайная величина $\xi_k$. При переходе к следующему спейсингу $[s_{k+1}, s_{k+2})$ случайная величина $\xi_k$, которая маркирует спейсинг $[s_k, s_{k+1})$, замещается следующей величиной $\xi_{k+1}$ из последовательности $(\xi)$. Траектории процесса случайного индекса естественным образом интерпретируются как элементы пространства Скорохода.

Особый интерес представляет частный случай, когда в качестве процесса $X$, осуществляющего случайную замену времени, берется пуассоновский процесс. Рассмотрим следующий частный случай. Пусть последовательность $(\xi)$ задана при целых неотрицательных значениях индекса (вид этой последовательности пока не уточняем), пуассоновский процесс $\Pi(s)$, $s \geqslant 0$, имеет постоянную интенсивность $\lambda > 0$ и не зависит от $(\xi)$. Процессом пуассоновского случайного индекса (ПСИ–процессом) назовем процесс с непрерывным временем, определяемый выражением $\psi(s) = \xi_{\Pi(s)}$, $s \geqslant 0$.

При рассмотрении различных типов последовательности $(\xi)$ мы будем получать различные процессы ПСИ. В частности, если $(\xi)$ — детерминированная последовательность целых неотрицательных чисел, то в этом случае процессом ПСИ будет сам пуассоновский процесс $\Pi$. Следующий пример хорошо изучен, широко применяется в теории риска — это когда $(\xi)$ представляет собой последовательность накопленных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. В этом случае процесс ПСИ является процессом с независимыми приращениями, что позволяет детально исследовать многие его свойства. Мы же остановимся на случае, когда последовательность $(\xi)$ стационарна. В этом случае, даже когда $(\xi)$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, соответствующий процесс ПСИ уже не является стационарным. Здесь интересным примером является случай, когда независимые одинаково распределенные элементы $(\xi)$ имеют распределение $\pm 1$ с вероятностью $1/2$. В этом случае процессом ПСИ становится телеграфный процесс с управляющим пуассоновским процессом интенсивностью $\lambda/2$.

**Лемма 1.** *Пусть последовательность $(\xi)$ строго стационарна, пуассоновский процесс $\Pi$ с интенсивностью $\lambda > 0$ от нее не зависит, тогда процесс $\psi(s) = \xi_{\Pi(s)}$, $s \geqslant 0$, также строго стационарен.*

Рассмотрим случай, когда у стационарной последовательности $(\xi)$ существует ковариационная функция $r(n)$, $n$ — целое неотрицательное число.

**Лемма 2.** *В условиях леммы 1 имеет место следующая формула для ковариационной функции $R$ процесса $\psi$:*

$$R(s) = \mathbf{E}\,\{r(\Pi(s)\}, \qquad s \geqslant 0. \tag{1}$$

**Следствие леммы 2.** *Пусть последовательность $(\xi)$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, тогда $R(s) = \exp\{-\lambda s\}$. В случае, когда $(\xi)$ — стационарный центрированный и нормированный процесс авторегрессии первого порядка с показателем $\gamma > 0$, ковариация $R(s) = \exp\{-\lambda(1 - e^{-\gamma})s\}$.*

Рассмотрим нормированные суммы процессов случайного индекса

$$Z_N(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \psi_j(s), \qquad s \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\psi_j(s)$ $(j \in \mathbf{N})$ — независимые копии процесса $\psi$ при условиях леммы 2.

**Теорема.** *Конечномерные распределения процесса $Z_N$, определенного в* (2), *сходятся при $N \to \infty$ к конечномерным распределениям стационарного гауссовского процесса с ковариационной функцией $R$, определенной в* (1).

**Следствие теоремы.** *В качестве важного следствия теоремы отметим, что в частных случаях следствия леммы* 2 *в качестве пределов $Z_N$ мы получим процессы Орнштейна–Уленбека с вязкостью, равной $\lambda$ и $\lambda(1-e^{-\gamma})$, соответственно.*

Модель стационарного процесса пуассоновского случайного индекса может иметь множество интерпретаций в финансах и страховании. Теорема 1 объясняет использование процессов Орнштейна–Уленбека в модели О. Васичека, в частности, и в теории процентных ставок, вообще.