В. Н. К о л о д е ж н о в (Воронеж, ВГТА). **Оценки областей сходимости итерационного процесса для некоторых частных случаев степенных функций комплексной переменной.**

Для степенных функций комплексной переменной рассматривается итерационный процесс вида

$$z_{n+1} = f(z_n) + C, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad z_1 = 0, \tag{1}$$

где C — параметр, принимаемый из множества комплексных чисел.

В случае наиболее простой нелинейной функции $f(z) = z^2$ хорошо известен следующий результат [1].

Теорема. *Если $|C| > R = 2$ и для некоторого m выполняется условие $|z_m| \geqslant |C|$, то, начиная с этого номера, траектория итерационного процесса*

$$z_{n+1} = z_n^2 + C, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad z_1 = 0, \tag{2}$$

устремляется в бесконечность, т. е. $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

Для точек же внутри круга радиуса R требуется дополнительная проверка. Та часть из них, для которых траектория итерационного процесса (2) при некотором m выходит за пределы круга радиуса R, предполагает расходимость итерационного процесса. Другая же часть точек в плоскости параметра C, не обладающая этим свойством, образует для итерационного процесса (2) множество Мандельброта.

В работе, представленной данным сообщением, для некоторых частных случаев вида степенной функции $f(z)$ комплексной переменной доказаны теоремы, аналогичные выше приведенной теореме. При этом для каждого конкретного вида функции $f(z)$ установлено значение радиуса R той области на комплексной плоскости параметра C, за пределами которой заведомо имеет место расходимость итерационного процесса (1) в указанном выше смысле.

В частности, получены следующие оценки для границы области расходимости итерационного процесса вида (1).

1. Пусть $f(z) = z^2 + C_1 z$, где C_1 — постоянный коэффициент, принадлежащий множеству комплексных чисел. Тогда $R = 2 + |C_1|$.

2. Пусть $f(z) = z^3 + C_2 z^2 + C_1 z$, где C_1, C_2 — постоянные коэффициенты, принадлежащие множеству комплексных чисел. Тогда

$$R = \frac{1}{2}\left\{|C_2| + \sqrt{|C_2|^2 + 4(2 + |C_1|)}\right\}.$$

3. Пусть $f(z) = z^k$, $k = 2, 3, \ldots$. Тогда $R = \sqrt[k-1]{2}$.

При этом показано, что последние оценки для радиуса расходимости допускают следующие обобщения.

4. Пусть $f(z) = z^{2k+1} + C_{k+1} z^{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где C_{k+1} — постоянный коэффициент, принадлежащий множеству комплексных чисел. Тогда

$$R = \left[\frac{1}{2}\left\{|C_{k+1}| + \sqrt{|C_{k+1}|^2 + 8}\right\}\right]^{1/k}.$$

5. Пусть $f(z) = z^k + C_1 z$, $k = 2, 3, \ldots$, где C_1 — постоянный коэффициент, принадлежащий множеству комплексных чисел. Тогда $R = \{2 + |C_1|\}^{1/(k-1)}$.

С учетом полученных результатов проведены численные эксперименты по построению в плоскости параметра C соответствующих аналогов множества Мандельброта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000, 352 с.