А. А. Маляренко (Томск, ТГУ). **Оценивание авторегрессионных параметров процесса $AR(p)/ARCH(p)$.**

В работе, представленной данным сообщением, решается задача оценивания авторегрессионных параметров нелинейного устойчивого стохастического процесса с дискретным временем типа $AR/ARCH$. Предполагается, что распределения шумов процесса неизвестны. Показана сильная состоятельность оценок корреляционного типа. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое произвольное, но фиксированное вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$. Предполагается, что наблюдаемый скалярный процесс $x = (x_n)_{n \geqslant 1-p}$ удовлетворяет уравнению типа $AR(p)/ARCH(p)$:

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_{n-i} + \sqrt{\sigma_0^2 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2 x_{n-i}^2}\, \xi_n, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'$ и $\sigma^2 = (\sigma_0^2, \ldots, \sigma_p^2)'$ — векторы неизвестных параметров, $x(0) = (x_{1-p}, \ldots, x_0)'$ — $\mathcal{F}_0$-измеримый вектор начальных значений, шум $\xi = (\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$ образует процесс мартингал–разность. Процессы ξ и $x(0)$ взаимно независимы и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} E(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0, \quad E(\xi_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = 1, \quad E(\xi_n^3 | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \text{п. н.}, \quad \sup_{n \geqslant 1} E\xi_n^4 < \infty; \\ Ex(0) = 0, \quad E\|x(0)\|^4 < \infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Для построения оценок параметра λ запишем уравнение (1) в векторном виде: $x(n) = Ax(n-1) + S_{n-1} b \xi_n$, где $x(n) = (x_n, \ldots, x_{n-p+1})'$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \ldots & \lambda_{P-1} & \lambda_p \\ 1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$S_n^2 = \sigma_0^2 + x'(n) R^2 x(n), \quad R^2 = \operatorname{diag}\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_p^2\}, \quad \lambda = A'b.$$

Корреляционная оценка $\widehat{A}(N)$ матрицы A имеет вид

$$\widehat{\lambda}(N) = \widehat{A}'(N) b, \tag{3}$$

где

$$\widehat{A}(N) = \Phi(N) G^{-1}(N), \quad \Phi(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n) x'(n-1), \quad G(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n-1) x'(n-1).$$

Для нахождения условий на параметры процесса (1), при которых оценка $\widehat{\lambda}(N)$ является сильно состоятельной, введем обозначение $\operatorname{vec}[G]$ — вектор-столбец, составленный из столбцов матрицы G. Как следует из теоремы (см. ниже), свойство сильной состоятельности корреляционных оценок может быть получено при условии устойчивости процесса

$z(n) = \operatorname{vec}[x(n)x'(n)x(n)x'(n)] = \|x(n)\|^2 \operatorname{vec}[x(n)x'(n)]$, который описывает поведение четвертых степеней процесса (1).

Показано, что процесс $z(n)$ удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению:

$$z(n) = Dz(n-1) + B\operatorname{vec}[x(n-1)x'(n-1)] + (\sigma_0^2)^2 \operatorname{vec}[\Sigma] + \delta(n), \tag{4}$$

где D и B — постоянные матрицы, $\delta(n)$ — шумовой процесс с нулевым средним.

Теорема. *Пусть наблюдаемый процесс x удовлетворяет уравнению* (1), *а для шумового процесса ξ и $x(0)$ выполнены условия* (2). *Тогда, если матрица динамики D процесса* (5) *является устойчивой, то оценка $\widehat{\lambda}(N)$ векторного параметра λ, определенная в* (4), *является сильно состоятельной.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09–01–00172.