Т. А. Б е л к и н а, **Н. Б. К о н ю х о в а** (Москва, ЦЭМИ РАН, ВЦ РАН). **О вероятности разорения в модели страхования с учетом инвестирования.**

Рассматривается динамическая модель страхования с дискретным временем, в которой исходный процесс риска имеет вид (см. [1]) $R_n = u + cn - \sum_{k=1}^{n} Z_k$, где R_n — капитал компании в момент времени n ($n = 1, 2, \ldots$), u — начальный капитал, число $c > 0$ определяет размер страховых взносов, Z_k ($k = 1, 2, \ldots$) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.) с функцией распределения (ф. р.) $F(z)$, определяющих размеры страховых выплат. При инвестировании всего капитала в безрисковый актив при процентной ставке $r > 0$ динамика капитала описывается уравнением

$$X_n = (1+r)X_{n-1} + c - Z_n, \quad X_0 = u. \tag{1}$$

Вероятность $\psi(u)$ разорения для процесса $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ на бесконечном интервале времени является функцией начального капитала, соответствующая вероятность $\varphi(u) = 1-\psi(u)$ неразорения определяется равенством $\varphi(u) = \mathbf{P}\{X_n \geqslant 0 \text{ для любого } n\}$; функция $\varphi(u)$ удовлетворяет уравнению $(\mathcal{A}\varphi)(u) = 0$, где $(\mathcal{A}f)(x) = \mathbf{E}\,(f(X_1)-f(X_0)|X_0 = x)$ — «производящий» оператор, соответствующий однородной марковской цепи (1). В данном случае $(\mathcal{A}f)(x) = \mathbf{E}\,f(x(r+1)+c-Z) - f(x)$, где Z — с. в. с ф. р. $F(z)$. В случае экспоненциального распределения выплат, т. е. когда $F(z) = 1 - e^{-\lambda z}$, функция $\varphi(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(u) = \lambda \int_0^{u(r+1)+c} \varphi(u(r+1)+c-z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad u \geqslant 0, \tag{2}$$

и условию

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1. \tag{3}$$

Задача (2), (3) сводится к нахождению нужного решения сингулярной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$\varphi'(u) = \lambda(r+1)[\varphi(u(r+1)+c) - \varphi(u)], \quad u \geqslant 0, \tag{4}$$

которое определяет следующая лемма.

Лемма. *Решение сингулярной задачи Коши* (4), (3) *тогда и только тогда является решением сингулярной интегральной задачи* (2), (3), *когда выполняется условие*

$$\varphi(0) = \lambda \int_0^{c} \varphi(c-z)e^{-\lambda z}\,dz. \tag{5}$$

(В частности, решение $\varphi(u) \equiv 1$ задачи (4), (3) не является решением задачи (2), (3).)

Сингулярная задача Коши (4), (3) была исследована путем сведения ее к эквивалентной задаче для функционально–интегрального уравнения с параметром и доказательству существования и единственности его решения (при каждом фиксированном значении параметра) с помощью принципа сжатых отображений (о теоремах разрешимости сингулярных задач Коши для достаточно общих систем функционально–дифференциальных уравнений см., например, [2], [3]).

Соотношение (5) позволяет затем выделить из полученного однопараметрического семейства решений задачи (4), (3) единственное решение задачи (2), (3). В результате справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнено условие* $e^{-\lambda c(r+1))/r} = q < 1$. *Тогда решение* $\varphi(u)$ *сингулярной интегральной задачи* (2), (3) *существует и единственно, является* *монотонно возрастающей функцией, удовлетворяющей условию* $0 < \varphi(u) < 1$, $u \geqslant 0$, *и представляется в виде*

$$\varphi(u) = 1 - \mu_\infty \Bigg[e^{-\lambda[u(r+1)+c]} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp\{-\lambda(u(r+1)^k + c[1+(r+1)+\cdots+(r+1)^{k-1}])\}}{r[(r+1)^2-1]\cdots[(r+1)^{k-1}-1]} \Bigg], \quad u \geqslant 0.$$

Здесь ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно на $\mathbf{R}_+$, *а параметр* μ_∞ *определяется равенством*

$$\mu_\infty = \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp\{-\lambda c[1+(r+1)+\cdots+(r+1)^{k-1}]\}}{r[(r+1)^2-1]\cdots[(r+1)^k-1]} \right)^{-1}.$$

Соответствующее представление для вероятности разорения было получено также в [1] путем достаточно сложных вычислений предельного значения для вероятностей разорения на конечных интервалах времени, когда длина интервала неограниченно возрастает; в этом случае вместо интегрального уравнения (2) рассматриваются рекуррентные интегральные соотношения и число итераций устремляется к бесконечности.

Работа поддержана грантами РФФИ, проекты № 07–01–00541 и № 08–01–00139.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мельников А. В.* Риск-менеджмент. Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. М.: АНКИЛ, 2003.
2. *Конюхова Н. Б.* Сингулярные задачи Коши для некоторых систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. — Дифф. уравнен., 1995, т. 31, № 8, с. 1340–1347.
3. *Konyukhova N. B.* On a solvability of singular Cauchy problems for functional-differential equations with a (non-)summable singularity and (non-)Volterra operator. — In: Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Math. School-Symposium (KROMSH-2005). Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University, 2006, v. 16, p. 159–167.