**А. Ю. Голубин** (Москва, МИЭМ). **Оптимизация страхования для процесса риска при различных ограничениях на риски страхователей.**

Рассматривается задача оптимального управления процессом риска Лундберга–Крамера (см., например, [2]) для двух разных типов ограничений на риски страхователей: на среднее значение и с вероятностью единица. Управляемый процесс риска имеет вид

$$X_t = x + \int_0^t c_s\,ds - \sum_{i=1}^{N_t} I_{t_i}(Y_i), \tag{1}$$

где $x$ — начальный капитал, $\{N_t\}$ есть Пуассоновский процесс исков с параметром $\lambda$, $\{Y_i\}$ — независимые одинаково распределенные страховые выплаты (риски) с функцией распределения $F(x)$ и конечным вторым моментом $\mathbf{E}\,Y^2 < \infty$. В момент выплаты $t = t_i$ страховщик выбирает дележ риска $I_t(\cdot)$, так что $I_t(Y_i)$ — доля, возмещаемая клиенту, а скорость накопления премии (она определяется по принципу среднего значения с заданным коэффициентом нагрузки $\alpha > 0$) становится равной $c_t = (1+\alpha)\lambda\mathbf{E}\,I_t(Y)$ вплоть до следующей выплаты. В качестве допустимых стратегий $I = \{I_t\}$ рассматриваются измеримые и предсказуемые относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}$ управления, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant I_t(x) \leqslant x$. Интервал функционирования процесса бесконечен, в качестве минимизируемого критерия оптимальности используется функционал, который по аналогии с известным в теории риска термином можно назвать «стационарным коэффициентом вариации»

$$J[I] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbf{D}\,X_t/\mathbf{E}\,X_t. \tag{2}$$

**Задача с ограничением на средний риск.** Введем дополнительное ограничение: допустимыми считаются только те дележи страхования $I$, которые удовлетворяют ограничению сверху на средний риск, остающийся у клиента (страхователя) после страхования, $\mathbf{E}\,\{Y - I_t(Y)\} \leqslant C$, где $t$ — момент выплаты (фиксированный), $C \in [0, \mathbf{E}\,Y]$ — заданная константа. Эквивалентное ограничение на риск страховщика можно записать в виде $\mathbf{E}\,I_t(Y) \geqslant M$, где $M = \mathbf{E}\,Y - C$. Исследуемая задача имеет вид

$$J[I] \to \min, \quad \mathbf{E}\,I_t(Y) \geqslant M. \tag{3}$$

**Теорема 1.** *Минимум в задаче* (3) *достигается на стационарной стратегии $I^*(\cdot)$, не зависящей от текущего состояния процесса. Оптимальная функция дележа есть stop-loss страхование $I^*(x) = x\wedge k^*$, параметр $k^*$ является единственным корнем уравнения $\int_0^k \overline{F}(x)\,dx = M$, где $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.*

Найденная форма оптимального дележа является ожидаемой в свете результатов [1], где аналогичная функция дележа была получена в одной статической модели со средней полезностью в качестве критерия оптимальности.

**Задача с «жестким» ограничением.** Пусть допустимыми считаются только те дележи, которые удовлетворяют ограничению сверху на риск клиента, выполняющемуся с вероятностью единица: $Y - I_t(Y) \leqslant q$. Эквивалентное ограничение на риск страховщика можно записать как $I_t(x) \geqslant (x-q)_+$, $x \in [0,\infty)$.

**Теорема 2.** *Минимум в задаче $J[I] \to \min$, $I_t(x) \geqslant (x-q)_+$, достигается на стационарной стратегии $I^*(\cdot)$, не зависящей от текущего состояния процесса. Оптимальная функция дележа есть комбинация stop-loss страхования и франшизы, $I^*(x) = x \wedge k^* \vee (x-q)$, где $k^*$ является единственным корнем уравнения*

$$\int_0^k (k-x)\overline{F}(x)\,dx + \int_k^\infty (k-x)\overline{F}(x+q)\,dx = 0.$$

Полученная функция $I^*(x)$ есть своего рода обобщение франшизы $I(x) = (x-q)_+$, поскольку «хвост» распределения ущерба остается страховщику; при этом мелкие ущербы делятся в соответствии со stop-loss страхованием, $I(x) = x \wedge k$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубин А. Ю.*, *Гридин В. Н.*, *Газов А. И.* Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием. — Автоматика и телемеханика, 2009, т. 70, в. 8 (в печати).
2. *Panjer H. H.*, *Willmot G. E.* Insurance Risk Models. Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries, 1992.