О. В. Русаков (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Суммы независимых пуассоновских процессов случайного индекса: временная зависимость как проекция.**

Пусть $(\xi) = \ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$ — некоторая последовательность случайных величин; $\Pi(s) = \Pi_\lambda(s)$, $s \in \mathbf{R}$ — пуассоновский случайный процесс с интенсивностью $\lambda > 0$, независимый от последовательности (ξ).

Определение 1. *Процессом пуассоновского случайного индекса* $\psi(s) = \psi_\lambda(s)$ назовем субординацию для последовательности (ξ), выполненную посредством пуассоновского процесса Π, т. е.

$$\psi(s) = \xi_{\Pi(s)}, \qquad s \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Последовательность (ξ) назовем *формирующей*, процесс Π — *управляющим*, а полученный процесс ψ — *процессом ПСИ*.

Рассмотрим случай, когда случайные величины управляющей последовательности независимы, одинаково распределены, имеют нулевое среднее и единичную дисперсию. В этом случае, как нетрудно убедиться, автоковариация процесса ПСИ убывает экспоненциально, $\operatorname{cov}(\psi(s_1), \psi(s_2)) = \exp\{-\lambda|s_1 - s_2|\}$.

Пусть $(\psi_j(s))$, $j \in \mathbf{N}$ — независимые копии процесса $\psi(s)$, заданного определением 1, в частности, все управляющие пуассоновские процессы независимы и одной интенсивности, и все формирующие последовательности независимы. Рассмотрим нормированные суммы процессов случайного индекса

$$Z_N(t, s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{[Nt]} \psi_j(s), \qquad s \in \mathbf{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где квадратные скобки обозначают целую часть.

Теорема 1. *Конечномерные распределения процесса* $Z_N(t, s)$, *определенного* (2), *сходятся при* $N \to \infty$ *к конечномерным распределениям центрированного гауссовского поля* $Z(t, s)$ *с ковариационной функцией*

$$\min\{t_1, t_2\} \exp\{-\lambda|s_1 - s_2|\}, \qquad t_1, t_2 \geqslant 0, \quad s_1, s_2 \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Определение 2. Поле $Z(t, s)$ назовем *полем Винера–Орнштейна–Уленбека* (ВОУ), так как оно вдоль времени t (которое мы будем называть *внешним* или *ведущим временем*) ведет себя как винеровский процесс, а вдоль времени s (которое мы будем называть *внутренним временем*) ведет себя как процесс Орнштейна–Уленбека — стационарный гауссовский марковский процесс.

В частном случае $Z(1, s)$ как функция от $s \in \mathbf{R}$ представляет собой стандартный процесс Орнштейна–Уленбека с единичной дисперсией и коэффициентом вязкости λ. Наиболее часто используемым представлением для процесса Орнштейна–Уленбека является уравнение Ланжевена, которое мы приводим в виде его решения, заданного на положительной полуоси,

$$U(s) = U(0)e^{-\lambda s} + \sqrt{2\lambda} \int_0^s e^{-\lambda(s-u)}\, dB(u), \qquad s \geqslant 0, \tag{4}$$

где: $B(u)$ $(u \geqslant 0)$ — стандартное броуновское движение; $U(0) \in \mathcal{N}\{0, 1\}$ — не зависящая от $B(u)$ стандартная нормальная случайная величина; $\lambda > 0$ — параметр вязкости.

Зафиксируем $s > 0$ и проанализируем формулу (4). Видно, что начальное значение $U(0)$ умножается на постоянную, меньшую единицы, что означает *сжатие* распределения начального значения. Величина $U(s)$ представляется в виде суммы двух независимых нормальных величин, необходимая корреляция обеспечивается множителем $\exp\{-\lambda s\}$, а вклад в общую единичную дисперсию для $U(s)$, исходящий от начального значения $U(0)$, равен $\exp\{-2\lambda s\}$.

Иная картина наблюдается в случае, когда процесс Орнштейна–Уленбека получен в результате суммирования независимых одинаково распределенных процессов ПСИ. Для каждого N переставим процессы ПСИ в порядке убывания по мере наступления первого скачка у ведущего пуассоновского процесса, соответственно. Условия теоремы 1 остаются в силе, и случайная предельная функция имеет также распределение поля ВОУ. В переставленном случае для $Z_N(t,s)$ и $Z(t,s)$ оставим прежние обозначения. Обозначим при фиксированном $s>0$: $W^0(t)=Z(t,0)$, $W^s(t)=Z(t,s)$, $t\in[0,1]$, соответствующие сечения поля ВОУ, которые, очевидно, по t представляют собой броуновские движения. В момент $t=1$ значения $W^0(1)=Z(1,0)$, $W^s(1)=Z(1,s)$ вдоль времени s являются (по распределению) значениями процесса Орнштейна–Уленбека $U(0)$ и $U(s)$, соответственно.

Теорема 2. *При $N\to\infty$ верны следующие предельные соотношения.*

А. *Нормированные суммы* (2) *переставленных по первому скачку процессов случайного индекса сходятся в смысле конечномерных распределений к полю Винера–Орнштейна–Уленбека $Z(t,s)$.*

Б. *Для фиксированного $s>0$ величины $Z_N(t,0)$ и $Z_N(t,s)$, $t\in[0,1]$, сходятся совместно в смысле конечномерных распределений к броуновским движениям $W^0(t)$ и $W^s(t)$, причем*

$$W^s(t)=W^0(\min\{t,\exp\{-\lambda s\}\})+\mathbf{1}\{t\geqslant\exp\{-\lambda s\}\}(W^s(t)-W^s(\exp\{-\lambda s\})\},$$

и приращение $W^s(t)-W^s(\exp\{-\lambda s\})$ при $t\geqslant\exp\{-\lambda s\}$ не зависит от $W^0(v)$, $v\in[0,1]$.

Заметим, что $Z(1,0)$ и $Z(1,s)$ являются значениями процесса Орнштейна–Уленбека $U(0)$ и $U(s)$, соответственно. Теорема 2 дает представление

$$\begin{aligned} U(0)&=W^0(\exp\{-\lambda s\})+(W^0(1)-W^0(\exp\{-\lambda s\})),\\ U(s)&=W^0(\exp\{-\lambda s\})+(W^s(1)-W^s(\exp\{-\lambda s\})), \end{aligned}\tag{5}$$

причем приращения $W^0(1)-W^0(\exp\{-\lambda s\}$ и $W^s(1)-W^s(\exp\{-\lambda s\})$ независимы.

Из представления (5) следует вывод, что в случае суммирования независимых процессов ПСИ вклад в общую единичную дисперсию для $U(s)$, исходящий от начального значения $U(0)$, равен $\exp\{-\lambda s\}$, что в квадратный корень отличается от канонического представления в форме уравнения Ланжевена (4). Представление (5) основывается на *проекции* части траектории броуновского движения W^0, формирующего начальное значение процесса Орнштейна–Уленбека $U(0)$, на внутреннее время.