С. А. Загребина (Челябинск, ЮУрГУ). **Существование и устойчивость решений задачи Бенара для уравнений термоконвекции.**

Пусть $\Omega = (0,a) \times (0,b) \subset \mathbf{R}^2$. Нас интересует фазовое пространство, а также устойчивое и неустойчивое инвариантные пространства *задачи Бенара*

$$\psi(x,0,t) = \Delta\psi(x,0,t) = \psi(x,b,t) = \Delta\psi(x,b,t) = 0, \tag{1}$$

$$\theta(x,0,t) = \theta(x,b,t) = 0, \tag{2}$$

$$\text{функции } \psi \text{ и } \theta \text{ периодичны по } x \text{ с периодом } a \tag{3}$$

в цилиндре $\Omega \times \mathbf{R}_+$ для системы

$$(\lambda - \Delta)\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x,y)} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \delta \Delta \theta - \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x,y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4}$$

моделирующей плоскопараллельную термоконвекцию в слое вязкоупругой несжимаемой среды Кельвина–Фойгта [1].

Положим [2] $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{V} = \{v \in W_2^4(\Omega)\colon v$ удовлетворяет (1), (3)$\}$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{G} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega)$; определим операторы

$$L = \begin{pmatrix} (\lambda - \Delta)\Delta & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu\Delta^2 & \alpha \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \beta \dfrac{\partial}{\partial x} & \delta\Delta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\operatorname{dom} M = \mathfrak{V} \times \{w \in W_2^2(\Omega)\colon w$ удовлетворяет (2), (3)$\}$. При этом оператор M является $(L,0)$-секториальным [3].

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$, а $\mathfrak{U}_1$ обозначим линеал $\operatorname{dom} M$, снабженный «нормой графика». В качестве $\mathfrak{U}_N$ возьмем пространство $\mathfrak{U}_N = \mathfrak{V} \times \{w \in W_2^1(\Omega)\colon w$ удовлетворяет (2), (3)$\}$. Очевидно, $\mathfrak{U}_1 \hookrightarrow \mathfrak{U}_N \hookrightarrow \mathfrak{U}_0$, причем все вложения плотны и непрерывны. Формулой $N\colon u \longrightarrow \operatorname{col}(\partial(\Delta v, v)/\partial(x,y), \partial(v,w)/\partial(x,y))$ определим оператор $N\colon \mathfrak{U}_N \to \mathfrak{F}$. Нетрудно показать, что оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbf{O}$. Построим множество $\mathfrak{M}$, на котором находятся все квазистационарные траектории задачи Бенара для уравнения (4).

(i) $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}_\alpha$, если $\lambda \neq \lambda_j$;

(ii) $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U}_\alpha\colon \iint_\Omega \frac{\partial(\Delta v, v)}{\partial(x,y)} \varphi_j \, dx\, dy + \nu\lambda^2 = 0\}$, если $\lambda = \lambda_j$;

(iii) $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U}_\alpha\colon \iint_\Omega \frac{\partial(\Delta v, v)}{\partial(x,y)} \varphi_{mn}^k \, dx\, dy + \nu\lambda^2 = 0,\ k = 1,2\}$, если $\lambda = \lambda_{mn}$.

Здесь будем обозначать символами φ_{mn}, φ_{kl}, φ_j нормированные функции каждого семейства удовлетворяющих условиям (1), (3) собственных функций оператора Лапласа Δ, определенного в области Ω, а символами λ_{mn}, λ_{kl}, λ_j — соответствующие собственные значения (см. [2]).

Теорема 1. *При любых $\nu \in \mathbf{R}_+$, $\lambda \in \mathbf{R}$ множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым C^∞-многообразием, моделируемым пространством $\mathfrak{U}_N^1$.*

Теорема 2. *При любых $\alpha, \beta, \delta, \nu \in \mathbf{R}_+$, $\lambda \in \mathbf{R}$ существует бесконечномерное устойчивое и не более, чем конечномерное неустойчивое, инвариантные многообразия задачи Бенара для уравнений* (4).

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Г. А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г. А.*, *Сукачева Т. Г.* Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред. — Вестник МаГУ. Сер. матем. Магнитогорск, 2005, в. 8, с. 5–33.
2. *Загребина С. А.* Задача Шоуолтера–Сидорова–Веригина для линейных уравнений соболевского типа. Неклассические уравнения математической физики. — В сб.: Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа. Новосибирск: ИМ СОРАН, 2007, с. 150–157.
3. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht–Boston–Köln–Tokyo: VSP, 2003.