А. А. З а м ы ш л я е в а (Челябинск, ЮУрГУ). **Уравнение de Gennes звуковых волн в смектиках.**

Уравнение звуковых волн в смектиках, впервые полученное P. G. de Gennes, имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u = \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2 u, \quad \alpha_1 > 0, \tag{1}$$

где $\Delta_3 = \Delta_2 + \partial^2/\partial z^2$, $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$.

Исходная модель имеет смысл в цилиндрической области по переменным $\{z, x_1, x_2\} \in [a,b] \times \Omega$. В случае установившихся звуковых колебаний в смектике $u(x_1,x_2,z,t) = v(x_1,x_2,z)\exp\{-i\omega t\}$, исходное уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta_2 v + \alpha_2 v) + \alpha_2\Delta_2 v = 0, \quad \alpha_2 = \omega^2\alpha_1^{-1}. \tag{2}$$

Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega\times\mathbf{R}$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2):

$$v(x,0)=v_0(x), \quad v_z(x,0)=v_1(x), \quad x=(x_1,x_2)\in\Omega, \quad v(x,z)=0, \quad (x,z)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}. \tag{3}$$

Задачу (2), (3) можно описать в терминах задачи Коши

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{4}$$

для линейного уравнения соболевского типа [2] второго порядка

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u. \tag{5}$$

Редуцируя задачу (2), (3) к задаче (4), (5), положим

$$\mathcal{U} = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega)\colon\ v(x) = 0,\ x\in\partial\Omega\}, \quad \mathcal{F} = W_q^l(\Omega), \quad 2 \leqslant q < \infty.$$

Операторы A, B_1 и B_0 зададим формулами $A = \Delta - \alpha$, $B_1 = \mathbf{O}$, $B_0 = \alpha\Delta$ (здесь $\alpha = -\alpha_2$, $\Delta = \Delta_2$). В этом случае оказывается возможным применение абстрактных результатов о морфологии фазового пространства такого уравнения [3]. Обозначим $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений, а $\{\varphi_k\}$ — семейство соответствующих собственных функций однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ.

Теорема. (i) *Пусть* $\alpha \notin \sigma(\Delta)$. *Тогда при любых* $v_0, v_1 \in \mathcal{U}$ *существует единственное решение задачи* (2), (3)

$$u(z) = \sum_{\alpha<\lambda_k}\langle v_0,\varphi_k\rangle\varphi_k \operatorname{ch}\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k-\alpha}}z + \sum_{\alpha>\lambda_k}\langle v_0,\varphi_k\rangle\varphi_k \cos\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha-\lambda_k}}z$$
$$+ \sum_{\alpha<\lambda_k}\langle v_1,\varphi_k\rangle\varphi_k \sqrt{\frac{\lambda_k-\alpha}{\alpha\lambda_k}} \operatorname{sh}\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k-\alpha}}z + \sum_{\alpha>\lambda_k}\langle v_1,\varphi_k\rangle\varphi_k \sqrt{\frac{\alpha-\lambda_k}{\alpha\lambda_k}} \sin\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha-\lambda_k}}z.$$

(ii) *Пусть* $\alpha \in \sigma(\Delta)$. *Тогда при любых* $v_0, v_1 \in \mathcal{U}^1 = \{v\in\mathcal{U}\colon \langle v,\varphi_k\rangle = 0,\ \lambda=\lambda_k\}$ *существует единственное решение задачи* (2), (3), *имеющее вид из п.* (i).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht-Boston-Tokyo-Keln: VSP, 2003.
3. *Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка. — Вычисл. технологии, 2003, т. 8, № 4, с. 45–54.