В. А. И в н и ц к и й (Москва, МГУПС)**. Определение корреляционных функций количества требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания с возможностью обхода узлов требованиями.**

В работе, представленной данным сообщением, для нахождения корреляционных функций количества требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания (ЗСеМО) с возможностью обхода ими узлов применяется метод стохастических разностных уравнений [1].

Пусть в замкнутой СеМО имеется m узлов и циркулирует N требований. Требование, направленное в i-й узел с другого узла, с вероятностью $f(i)$ начинает сразу обслуживаться, а с вероятностью $1-f(i)$ уходит из узла, считаясь обслуженным (т. е. у него время обслуживания с вероятностью 1 равно нулю). Если в i-м узле в момент времени t находится n_i требований, $i=1,2,\dots,m$, то в интервале $(t,t+dt)$ в нем закончится обслуживание очередного требования с вероятностью $\mu_i n_i\,dt+o\,(dt)$, $dt\to\infty$, т. е. обслуживание каждого требования ведется с интенсивностью $\mu_i>0$. Требование, обслуженное i-м узлом, с вероятностью P_{ij} направляется в j-й узел. Матрица $(P_{ij})_{m\times m}$ неразложима. Вводится процесс $\boldsymbol{\nu}(t)=(\nu_1(t),\nu_2(t),\dots,\nu_m(t))$, где $\nu_i(t)$ — число требований в i-м узле в момент времени t, $i=1,2,\dots,m$. Легко усмотреть, что процесс $\boldsymbol{\nu}(t)$ является марковским случайным процессом. Обозначим $n_i(t)=\mathbf{M}\nu_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$. Надо найти корреляционные функции введенных процессов $\nu_i(t)$ по узлам и взаимные корреляционные функции этих процессов по парам узлов.

Введем обозначения: ψ_{ij} — условная вероятность того, что требование, поступающее в i-й узел, впервые получит обслуживание на j-м узле, β_{ij} — условная вероятность того, что требование, обслуженное i-м узлом, впервые после этого получит обслуживание на j-м узле, $i,j=1,2,\dots,m$. По формуле полной вероятности $\psi_{ij}=f(i)\delta_{ij}+(1-f(i))\sum_{k=1}^m P_{ik}\psi_{kj}$, $\beta_{ij}=\sum_{k=1}^m P_{ik}\psi_{kj}$, $i,j=1,2,\dots,m$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Положим $\widetilde{n}_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{M}\,\nu_i(t)\,dt$, $i=1,2,\dots,m-1$,

$$\widetilde{n}_{ik}(s,u)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st-ut'}\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')\,dt\,dt',\quad \widetilde{n}_{1ik}(s,0)=\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(0)\,dt,$$

$$\widetilde{n}_{2ik}(0,u)=\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(t)\,dt,\qquad i,k=1,2,\dots,m-1.$$

Теорема 1. *Для преобразований Лапласа смешанных моментов $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')$ в разных временных точках справедлива система линейных дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\begin{aligned}
&(su-\mu_m^2\beta_{mk}\beta_{mi}-\mu_i(1-\beta_{ii})\mu_m P_{mk}-\mu_k(1-\beta_{kk})\mu_m\beta_{mi}-(1-\beta_{ii})\mu_i\nu_k(1-\beta_{kk}))\widetilde{n}_{ik}(s,u)\\
&=\sum_{d=1,\,d\neq k}^{m-1}((1-\beta_{ii})\mu_i\mu_d\beta_{dk}-(1-\beta_{ii})\mu_i\mu_m\beta_{mk}+\mu_m\mu_d\beta_{dk}\beta_{mi}-\mu_m^2\beta_{mk}\beta_{mi})\widetilde{n}_{id}(s,u)\\
&-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}((1-\beta_{kk})\mu_k\mu_j\beta_{ji}-(1-\beta_{kk})\mu_k\mu_m\beta_{mi}+\mu_j\mu_m\beta_{mk}\beta_{ji}-\mu_m^2\beta_{mk}\beta_{mi})\widetilde{n}_{jk}(s,u)\\
&+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}\sum_{d=1,\,d\neq k}^{m-1}\mu_j\mu_d\beta_{dk}\beta_{ji}-\mu_m\mu_d\beta_{dk}\beta_{mi}-\mu_j\mu_m\beta_{mk}\beta_{ji}+\mu_m^2\beta_{mk}\beta_{mi})\widetilde{n}_{jd}(s,u)\\
&-Nu^{-1}(1-\beta_{ii})\mu_i\mu_m\beta_{mk}\widetilde{n}_i(s)-Ns^{-1}(1-\beta_{kk})\mu_k\mu_m\beta_{mi}\widetilde{n}_k(u)\\
&+Ns^{-1}\sum_{d=1\,d\neq k}^{m-1}\mu_m\mu_d\beta_{dk}\beta_{mi}\widetilde{n}_d(u)+Ns^{-1}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}\mu_j\mu_m\beta_{mk}\beta_{ji}\widetilde{n}_j(u)
\end{aligned}$$

$$+N^2s^{-1}u^{-1}\mu_m^2\beta_{mk}\beta_{mi}-N\mu_m^2\beta_{mk}\beta_{mi}\left(\sum_{i=1}^{m-1}\widetilde{n}_i(s)u^{-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_l(u)s^{-1}\right)$$

$$+s\widetilde{n}_{1ik}(s,0)+u\widetilde{n}_{2ik}(0,u)-\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0),\quad i,k=1,2,\ldots,m,\quad n_m(t)=N-\sum_{i=1}^{m-1}n_i(t),$$

где $\widetilde{n}_{1ik}(s,0)$ *определяются системой линейных уравнений*

$$(s+\mu_i(1-\beta_{ii})+\mu_m\beta_{mi})\widetilde{n}_{1ki}(s,0)$$
$$=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}\widetilde{n}_{1kj}(s,0)(\mu_j\beta_{ji}-\mu_m\beta_{mi})+Ns^{-1}\mu_m\beta_{mi}+\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0),$$

$\widetilde{n}_{2ik}(0,u)$ *определяются аналогичной системой линейных уравнений,* $i,k=1,2,\ldots,m-1$.

Размерность системы уравнений равна $(m-1)^2$ и не зависит от N.

Теорема 2. *Преобразования Лапласа* $\widetilde{n}_i(s)$ *функций* $n_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m-1$, *определяются системой линейных дифференциальных уравнений*

$$(s+\mu_i(1-\beta_{ii})+\mu_m\beta_{mi})\widetilde{n}_i(s)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}\widetilde{n}_j(s)(\mu_j\beta_{ji}-\mu_m\beta_{mi})+Ns^{-1}\mu_m\beta_{mi}+n_i^{(0)},$$

$i=1,2,\ldots,m-1$, *с произвольными начальными условиями* $n_i(0)=n_i^{(0)}\geqslant 0$, $i=1,2,\ldots,m-1$, *удовлетворяющими неравенству* $n_1^{(0)}+n_2^{(0)}+\cdots+n_{m-1}^{(0)}\leqslant N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивницкий В. А., Ивницкий О. В.* Нахождение нестационарных математических ожиданий количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 2, с. 304–305.