С. О. С и н и ц и н (Москва, МГУПС). **Метод моментов в задаче случайных колебаний полумаятника для системы первого порядка.**

Движение под действием узкополосного процесса, описываемое системой первого порядка, является весьма распространенной моделью в задачах механики, однако анализа стохастической системы никто до сих пор не проводил. Рассмотрим уравнение движения, описываемое системой первого порядка, подверженной действию узкополосного шума: $x'+\alpha x = \lambda\cos(y(t))$, $y' = \omega+\xi$. Здесь $x(t)$ — скорость, ξ — гауссовский белый шум, α — коэффициент трения, λ — амплитуда и ω — частота. Проведем усреднение исходной системы по Стратоновичу [1] для вычисления второго момента. Обозначим $x_2 = \cos[y(t)]$, $x_3 = \sin[y(t)]$.

В результате имеем систему стохастических дифференциальных уравнений

$$x_1' = -\alpha x_1 + \lambda x_2, \quad x_2' = -x_3[\omega + \xi(t)], \quad x_3' = x_2[\omega + \xi(t)]. \tag{1}$$

Далее применим метод моментов [1]. Положим $D_{11} = \langle x_1x_1\rangle$, $D_{12} = \langle x_1x_2\rangle$, где $\langle\cdots\rangle$ обозначает усреднение; $D_{11}' = \langle dx_1^2/dt\rangle = 2\langle x_1x_1'\rangle = \langle x_1(-\alpha x_1 + \lambda x_2)\rangle = -2\alpha D_{11} + 2\lambda D_{12}$, где $D_\xi = \langle\xi\xi\rangle$ — интенсивность шума.

Для того чтобы вычислить $\langle x_i\xi\rangle$ в смысле Стратоновича, надо добавить и вычислить поправочный член. Формула имеет вид $\langle g(x)\xi\rangle_{str} = (1/2)\langle g'(x)g(x)\xi\rangle_{ito}$. Следовательно, $\langle x_1(-x_3[\xi(t)])\rangle_{str} = (1/2)\langle x_1'(-x_3)\xi(t) - x_1x_3'\xi(t)\rangle = (1/2)\langle(-\alpha x_1 + \lambda x_2)(-x_3)\xi(t)\rangle_{ito} - (1/2)\langle x_1(x_2[\omega+\xi(t)])\xi(t)\rangle_{ito} = (1/2)(\alpha\langle x_1x_2\rangle\langle\xi(t)\rangle - \lambda\langle x_2x_3\rangle\langle\xi(t)\rangle) - (1/2)\langle x_1x_2\rangle\omega\langle\xi(t)\rangle - (1/2)\langle x_1x_2\rangle\langle\xi(t)\xi(t)\rangle = -D_{12}D_{\xi(t)}/2$, т. к. $\langle\xi(t)\rangle = 0$ и $\langle\xi(t)\xi(t)\rangle = D_\xi$.

Продолжая аналогично, получим динамическую систему:

$$D_{11}' = -2\alpha D_{11} + 2\lambda D_{12}, \qquad D_{12}' = -\alpha D_{12} + \lambda D_{22} - \omega D_{13} - \frac{1}{2}D_{12}D_\xi,$$
$$D_{22} + D_{33} = 1, \quad D_{13}' = -\alpha D_{13} + \lambda D_{23} + D_{12}\omega - \frac{1}{2}D_{13}D_\xi.$$

Предпоследнее условие — тригонометрическая единица. Покажем, что существует стационарное решение этой системы, т. е. ищем неподвижную точку. Положим здесь дополнительно $D_{22} = D_{33} = 1/2$, $D_{23} = 0$, т.к. функции x_2, x_3 не коррелируют, их усреднение на периоде равно нулю.

Теорема. *Существует неподвижная точка приведенной выше динамической системы*

$$D_{11} = \lambda^2\left(\alpha + \frac{D_\xi}{2}\right)\Big/D_0, \quad D_{12} = \lambda\left(\alpha + \frac{D_\xi}{2}\right)\Big/D_0, \quad D_{13} = \frac{\lambda\omega}{D_0}, \tag{2}$$

где $D_0 = 2\alpha[\omega^2 + (\alpha + D_\xi/2)^2]$.

Комментарии к доказательству. Динамическая система для моментов второго порядка (дисcперсий, коэффициентов корреляции) точно интегрируется:

$$D_{13}(t) = \frac{[-2\alpha(2\alpha + D_\xi)D_{11} + 4\lambda^2 D_{22} - (D_\xi + 6\alpha)D_{11}'(t) - 2D_{11}''(t)]}{4\lambda\omega},$$
$$D_{12}(t) = \frac{(2\alpha D_{11} + D_{11}'(t))}{2\lambda}.$$

Для функции $D_{11}(t)$ получим ОДУ третьего порядка

$$D_{11}'''(t) + (4\alpha + D_\xi)D_{11}''(t) + \frac{1}{4}(D_\xi^2 + 12D_\xi\alpha + 20\alpha^2 + 4\omega^2)D_{11}'(t)$$
$$+ \frac{1}{2}\alpha((D_\xi + 2\alpha)^2 + 4\omega^2)D_{11}(t) - 2\lambda^2 D_{22}'(t) - (D_\xi + 2\alpha)\lambda^2 D_{22} + 2\lambda^2\omega D_{23} = 0.$$

Предполагая, как и ранее, $D_{22} = D_{33} = 1/2$, $D_{23} = 0$, приведем решение:

$$\begin{aligned}
D_{11}(t) = {} & C_1 \exp\{t(-\delta - 2i\omega)/2\} + C_2 \exp\{t(-\delta + 2i\omega)/2\} + C_3 \exp\{-2t\alpha\} \\
& + \Big\{ \exp\{-t(\delta + 2\alpha)\}\delta\lambda^2 \Big[-4D_\xi[\exp\{t\delta\} + \exp\{t(\delta + 2\alpha)\} \\
& - \exp\{t(\delta + 4\alpha - 2i\omega)/2\} - \exp\{t(\delta + 4\alpha + 2i\omega)/2\}\Big]\alpha\omega \\
& + D_\xi^2 \Big[i\alpha \exp\{t(\delta + 4\alpha - 2i\omega)/2\}r - i\alpha \exp\{t(\delta + 4\alpha + 2i\omega)/2\} \\
& - \omega \exp\{t\delta\} + \omega \exp\{t(\delta + 2\alpha)\}\Big] + 4\Big[-i\alpha \exp\{t(\delta + 4\alpha - 2i\omega)/2\} \\
& + i\alpha \exp\{t(\delta + 4\alpha + 2i\omega)/2\} - \omega \exp\{t\delta\} + \omega \exp\{t(\delta + 2\alpha)\}\Big] \\
& \times (\alpha^2 + \omega^2)\Big\} \Big[\alpha\omega(\beta^2 + 4\omega^2)(\delta^2 + 4\omega^2)\Big]^{-1}.
\end{aligned}$$

Здесь $\beta = D_\xi - 2\alpha$, $\delta = D_\xi + 2\alpha$.

Так как уравнение на D_{11} линейное, отделим вещественную часть решения $\operatorname{Re} D_{11}(t) = C_1 \exp\{-t\delta/2\}\cos(\omega t) + C_3 \exp\{-2t\alpha) + [\exp\{-2t\alpha\}\delta\lambda^2\omega[D_\xi^2(\exp\{2t\alpha\} - 1) - 4D_\xi\alpha(1 + \exp\{2t\alpha\}) + 4(\exp\{2t\alpha\} - 1)(\alpha^2 + \omega^2)] + \exp\{-t\delta/2\}\alpha\omega[8D_\xi\delta\lambda^2 + C_2\rho]\cos(\omega t) + 2\exp\{-t\delta/2\}\alpha\delta\lambda^2(D_\xi^2 - 4(\alpha^2 + \omega^2))sin(\omega t)]/(\alpha\omega\rho)$, где $\rho = D_\xi^4 - 8D_\xi^2(\alpha^2 - \omega^2) + 16(\alpha^2 + \omega^2)^2$. Вычислим предел при t, стремящемся к бесконечности, и получим стационарное решение, приведенное в теореме. Константы C_j, $j = 1, 2, 3$, определяются начальными условиями, которые здесь не приводятся. Сравним полученный результат с решением исходной системы. Стационарное решение исходной детерминированой системы при $\xi = 0$ имеет вид $x(t) = (\lambda[\alpha\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)]/(\alpha^2 + \omega^2)$. Усредняя его по периоду $2\pi/\omega$, получим $\langle x^2\rangle = (\omega/(2\pi)) \int x^2(t)\,dt = \lambda^2/(2(\alpha^2 + \omega^2))$.

Численное исследование функций позволило обнаружить локальный максимум, соответствующий «размазанному» резонансу. Случайный шум не позволяет настроиться на резонанс точно. Точные решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, соответствующие исходной системе, можно построить методом «нефиксированной, конструктивной замены переменных», предложенным в [2]–[3], кратко изложеным в [4]–[5].

Автор выражает благодарность академику В. П. Маслову, докторам ф.-м.н. С. Ю. Доброхотову, К. А. Волосову, Д. В. Юрченко за полезные советы и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрченко Д. В.* Оптимальное управление и математическое моделирование в стохастических задачах механики. Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук, 2006, МИИТ.
2. *Волосов К. А.* Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами. Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук, 2007, МИЭМ (см. также сайт «Мир дифференциальных уравнений», http://eqworld.ipmnet.ru, раздел диссертаций).
3. *Волосов К. А.* Формулы для точных решений квазилинейных уравнений с частными производными в неявной форме. — Доклады АН, 2008, т. 77, № 1, с. 1–4.
4. *Синицын С. О.* Решения уравнения Фоккера–Планка в задаче случайных колебаний полумаятника системы первого порядка. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 3, с. 477–479.
5. *Volosova A. K.*, *Volosov K. A.*, *Sinisyn C. O.*, *Urchenko D. V.* New prorerty of PDE and exact solutions in parametric form. — In: Eighth International Conference «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics». Kiev: June 21–27, 2009.