

**И. А. К р у г л о в** (Москва, ТВП). **О гомоморфизмах сильно связанных конечных автоматов без выхода на регулярные автоматы.**

В работе, представленной данным сообщением, исследуется следующий подход к описанию гомоморфизмов конечных сильно связанных автоматов без выхода на регулярные автоматы.

Пусть  $A = (X_A, S_A, \delta_A)$ ,  $B = (X_B, S_B, \delta_B)$  — конечные автоматы без выхода,  $X_A, X_B$  — входные алфавиты,  $S_A, S_B$  — алфавиты состояний,  $\delta_A, \delta_B$  — функции переходов. Будем предполагать, что автомат  $A$  — сильно связный, автомат  $B$  — регулярный. Предположим, что пара отображений  $\varphi = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha: X_A \rightarrow X_B$ ,  $\beta: S_A \rightarrow S_B$ , есть гомоморфизм автомата  $A$  на автомат  $B$ . Тогда определено отображение  $f_\varphi: X_A \rightarrow G_B$  множества  $X_A$  в группу подстановок  $G_B$ , порожденную частичными функциями перехода  $\delta_B^{(y)}$ ,  $y \in X_B$ , автомата  $B$  (т. е. в группу автомата  $B$ ):

$$f_\varphi(x) = \delta_B^{(\alpha(x))}, \quad x \in X_A. \quad (1)$$

Если (без ограничения общности) предположить, что подстановки  $\delta_B^{(y)}$ ,  $y \in X_B$ , попарно различны, то из условия сильной связности автомата  $A$  следует, что гомоморфизм  $\varphi$  определяется отображением  $f_\varphi$ . В связи с этим представляет интерес следующая постановка задачи.

Пусть  $(G, \cdot)$  — произвольная конечная группа,  $f: X_A \rightarrow G$  — произвольное отображение, будем без ограничения общности предполагать, что множество  $f(X_A)$  является системой образующих элементов группы  $G$ . В докладе показано, каким образом можно дополнить отображение  $f$  до гомоморфизма  $\varphi$  автомата  $A$  на некоторый регулярный автомат  $B$  таким образом, что группа  $G_B$  изоморфна фактор-группе группы  $G$  по некоторому ее нормальному делителю  $N$ .

Для этого введем ориентированный граф  $\Gamma_A$  с множеством вершин  $S_A$  и множеством ориентированных ребер  $\{e_{s,t}^{+1}, e_{t,s}^{-1} | s, t \in S_A, \exists x \in X_A: \delta_A(s, x) = t\}$ . Путем  $z$  в графе  $\Gamma_A$  называется последовательность ребер  $z = (e_{s_1, s_2}^{\varepsilon_1}, e_{s_2, s_3}^{\varepsilon_2}, \dots, e_{s_k, s_{k+1}}^{\varepsilon_k})$ , при этом  $s_1$  есть начало,  $s_{k+1}$  — конец пути  $z$ . Если  $s_1 = s_{k+1}$ , то путь  $z$  называется петлей с концом  $s_1$ . Для любых таких  $s, t \in S_A$ , что существует  $x \in X_A$ , при котором  $\delta_A(s, x) = t$ , определим множества элементов группы  $G$ :

$$\Omega(e_{s,t}^{+1}) = \{f(x), \delta_A(s, x) = t\}, \quad \Omega(e_{t,s}^{-1}) = \{f(x)^{-1}, \delta_A(s, x) = t\}.$$

Пути  $z$  поставим в соответствие множество элементов группы  $G$ :  $\Omega(z) = \Omega(e_{s_1, s_2}^{\varepsilon_1}) \cdots \Omega(e_{s_k, s_{k+1}}^{\varepsilon_k})$ .

Зафиксируем произвольное состояние  $s_0 \in S_A$ , пусть  $G_0$  — объединение всех множеств  $\Omega(z)$ , соответствующих петлям  $z$  с концом  $s_0$ , тогда  $G_0$  — подгруппа группы  $G$ . Для каждого состояния  $s \in S_A$  зафиксируем произвольно путь  $z_s$  в графе  $\Gamma_A$  с началом  $s_0$  и концом  $s$ , а также элемент  $g_s \in \Omega(z_s)$ .

Определим регулярный автомат  $B$ . Пусть  $X_B = f(X_A)$ ,  $S_B$  — множество правых смежных классов группы  $G$  по ее подгруппе  $G_0$ ,  $\delta_B(G_0 g, y) = G_0 g y$  для любых  $G_0 g \in S_B$ ,  $y \in X_B$ . Будем говорить, что автомат  $B$  определяется автоматом  $A$ , группой  $G$  и отображением  $f$ .

Рассмотрим следующий нормальный делитель группы  $G$ :  $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1} G_0 g$ .

**Теорема.** *Отображения  $\alpha(x) = f(x)$ ,  $x \in X_A$ ,  $\beta(s) = G_0 g_s$ ,  $s \in S_A$ , определяют гомоморфизм  $\varphi = (\alpha, \beta)$  автомата  $A$  на регулярный автомат  $B$ , группа  $G_B$  изоморфна фактор-группе группы  $G$  по нормальному делителю  $N$ , причем для любого  $x \in X_A$  элемент  $f_\varphi(x)$  из равенства (1) соответствует при этом изоморфизме смежному классу  $f(x)N$ .*

С другой стороны, предположим, что заданы некоторый регулярный автомат  $C$  и гомоморфизм  $\psi$  автомата  $A$  на автомат  $C$ . Будем также предполагать, что частичные функции переходов автомата  $C$  попарно различны. Можно доказать, что автомат  $C$

изоморфен фактор-автомату автомата  $B$ , определяемого автоматом  $A$ , группой  $G_C$  и отображением  $f_\psi$ . С этой точки зрения указанные автоматы  $B$  из теоремы являются «максимальными» регулярными гомоморфными образами данного сильно связного автомата  $A$ .