Ю. И. Пастухова (Королев, КИУЭС). **О неустойчивости положения равновесия системы дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами.**

Рассматривается вопрос асимптотической устойчивости системы дифференциальных уравнений
$$dX(t)/dt = A(y(t))X(t) \tag{1}$$
(A — матрица $n\times n$, $X \in \mathbf{R}^n$), находящейся под воздействием однородной по времени марковской цепи с конечным числом состояний N.

С помощью замены переменных $\Lambda(t) = X(t)/\|X(t)\|$, $\rho(t) = \ln \|X(t)\|$ система (1) может быть записана в виде $d\rho(t)/dt = (A(y(t))\Lambda(t), \Lambda(t))$, где $(\Lambda(t), y(t))$ — марковский процесс, состояниями которого являются пары (Λ, j), $\Lambda \in S_n$, $j = 1, 2, \ldots, N$, S_n — поверхность единичной сферы с центром в начале координат $\mathbf{R}^n$.

Из усиленного закона больших чисел вытекает, что с вероятностью 1
$$\frac{\rho(T) - \rho(0)}{T} \to \sum_{i=1}^{N} \int_{S_n} (A(i)\lambda, \lambda)\mu_i(d\lambda) = a.$$
(Здесь $\mu_i(\Gamma)$ — стационарная вероятность события $(y(t) = i,\ \Lambda(t) \in \Gamma)$.)

Вопрос об устойчивости системы (1) сводится к определению знака числа a (см. [1]). Рассматривается частный случай системы двух дифференциальных уравнений, $y(t)$ — однородный марковский процесс с двумя состояниями и $\Lambda(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{smallmatrix}\right)$.

Стационарное распределение $\overline{\mu} = \left(\begin{smallmatrix} \mu_1(\varphi) \\ \mu_2(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$ марковского процесса $(\varphi, y(t))$ найдено явно как решение системы дифференциальных уравнений
$$\frac{d}{d\varphi} B(\varphi, 1)\mu_1) = -q_1\mu_1 + q_2\mu_2, \quad \frac{d}{d\varphi} B(\varphi, 2)\mu_2) = q_1\mu_1 + q_2\mu_2,$$
где μ_1, μ_2 — переходные плотности процесса $y(t)$,
$$B(\varphi, y(t)) = a_{21}(y(t))\cos^2\varphi(t) + (a_{22}(y(t)) - a_{11}(y(t)))\cos\varphi(t)\sin\varphi - a_{12}(y(t))\sin^2\varphi(t),$$
$a_{ij}((y(t))$ — элементы матрицы $A(y(t))$, $i, j = 1, 2$.

Предпринята попытка изучить устойчивость решения $x(t) = 0$ дифференциального уравнения $\ddot{x} + \omega^2(y(t))x(t) = 0$, $y(t) = 1, 2$.

Задача сводится к определению знака интеграла
$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 - \omega_1^2)\mu_1(\varphi) + (1 - \omega_2^2)\mu_2(\varphi)] \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi.$$

Из общих соображений вытекает, что $I \geqslant 0$. Удалось доказать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ значение интеграла I строго положительно, если плотности вероятностей перехода достаточно малы, $q_1 = c_1\varepsilon$, $q_2 = c_2\varepsilon$ $(c_1 \neq c_2)$, либо частоты колебаний маятника достаточно велики, $w_1 = c_1/\varepsilon$, $w_2 = c_2/\varepsilon$ $(c_1 \neq c_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.