Ю. Н. Горелов, **О. И. Горелова**, **С. Б. Данилов** (Самара, СамГУ). **К решению задачи оптимального управления сканированием маршрутов съемки при дистанционном зондировании Земли из космоса.**

В [1] приведена постановка вариационной задачи синтеза оптимальных законов сканирования произвольных маршрутов съемки (МС) в режиме «push broom» космическими средствами дистанционного зондирования. Модель сканирования описана в [1], [2] и в данной задаче требуется минимизировать

$$J_\beta = \int_{t_0}^{t_f} [F(t,s,w)w + \beta(w-w^*)^2]\,dt, \tag{1}$$

где $\beta \geqslant 0$ — весовой коэффициент, $w^* = w^*_{\text{пр}}(t,s)$ — некоторая заданная функция, а $F(t,s,w)$ — некоторая функция, характеризующая качество сканирования элементарной полоски МС с дуговой координатой s, отсчитываемой вдоль центральной линии МС от его начала [1]. При этом должны выполняться следующие ограничения: во-первых, для управляющего параметра

$$0 < w_{\min} \leqslant w \leqslant w_{\max} < \infty; \tag{2}$$

во-вторых, имеет место дифференциальная связь для фазовой переменной s:

$$\frac{ds}{dt} = P(t,s)w, \tag{3}$$

где $P(t,s)$ — некоторая функция, определяемая из условий сканирования [1], и соответствующие граничные условия для нее:

$$s(t_0) = 0, \quad s(t_f) = s_f, \tag{4}$$

где s_f — длина дуги сканируемого МС, а момент времени t_f не фиксирован, так как он определяется законом сканирования $s = s(t)$ из решения уравнения (3) при оптимальном управлении $w = w_{\text{opt}}$.

Для задачи (1)–(4) справедлив принцип максимума, а именно [3]: если управляющий параметр $w = w_{\text{opt}}(t)$, удовлетворяющий ограничениям (2), и соответствующее ему решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (4), доставляют минимум функционалу (1), то существует такая ненулевая непрерывная функция $\psi(t)$, что при каждом $t \in [t_0, t_f]$ гамильтониан

$$H(T,s,w,\psi) = -F(t,s,w)w - \beta(w-w^*)^2 + \psi P(t,s)w \tag{5}$$

достигает максимума по w, и выполняется условие трансверсальности, которое с учетом (5) имеет вид

$$\psi(t_f)P(t_f,s_f)w_f - F(t_f,s_f,w_f)w_f - \beta(w_f - w^*)^2 = 0, \tag{6}$$

где ψ — сопряженная переменная, удовлетворяющая уравнению $d\psi/dt = -\partial H/\partial s$, граничные условия для которого не определены, а $w_f = w_{\text{opt}}(t_f)$.

Структура оптимального управления в задаче (1)–(4) имеет вид

$$w_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} w_{\max}, & \widetilde{w}(t) \geqslant w_{\max}, \\ \widetilde{w}(t), & w_{\min} \leqslant \widetilde{w}(t) \leqslant w_{\max}, \\ w_{\min}, & \widetilde{w}(t) < w_{\min}, \end{cases} \tag{7}$$

где $\widetilde{w}(t)$ — стационарная точка гамильтониана (5) по управляющему параметру.

С учетом необходимых условий оптимальности и (7) решение задачи (1)–(4) сводится к соответствующей краевой задаче, для решения которой необходимо указать приемлемое начальное приближение. В силу имеющихся особенностей необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче такое приближение можно указать, если была решена задача параметрической оптимизации [2]. В этом случае из условия минимума функционала (1) при $\beta = 0$ с учетом (2)–(4) определяется $\widehat{w} = \mathrm{const}$ и соответствующее значение $t_f = \widehat{t}_f = \widehat{t}_f(\widehat{w})$, где $\widetilde{s}^{(0)}(\widehat{t}_f) = s_f$, а $s = \widetilde{s}^{(0)}(t)$ — решение уравнения (3) при $w = \widehat{w}$. Исходя из условий трансверсальности (6), вообще говоря, при любых $w_{\min} \leqslant \widehat{w} \leqslant w_{\max}$ и $\beta \geqslant 0$ также можно получить начальное приближение для конечного значения сопряженной переменной

$$\widetilde{\psi}_f^{(0)} = \widetilde{\psi}^{(0)}(\widehat{t}_f) = \frac{F(\widehat{t}_f, s_f, \widehat{w})\widehat{w} + \beta(\widehat{w} - w^*)^2}{P(\widehat{t}_f, s_f)\widehat{w}}. \tag{8}$$

Интегрируя с учетом (8) в обратном времени на интервале $[t_0, \widehat{t}_f]$ уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{d\overline{\psi}^{(0)}(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t, s, \widehat{w}, \widetilde{\psi}^{(0)}(t))}{\partial s}\bigg|_{s=\widetilde{s}^{(0)}(t)}, \tag{9}$$

получим $\widetilde{\psi}^{(0)}(t)$, а отсюда при $t = t_0$ — значение $\widetilde{\psi}^{(0)}(t_0)$, которое можно принять в качестве искомого приближения для начального значения $\psi_0 = \psi(t_0)$. Принимая далее в качестве начального значения для сопряженной переменной значение $\widetilde{\psi}^{(0)}(t_0)$, т. е. $\psi_0^{(1)} = \widetilde{\psi}^{(0)}(t_0)$, и учитывая (7) $\widetilde{w}^{(1)}(t) = w_{\mathrm{opt}}(t)$, можно решить задачу Коши для соответствующей П-системы в прямом времени до выполнения конечного условия: $s^{(1)}(t_s^{(1)}) = s_f$, и получить при этом начальное приближение для решения вариационной задачи (1)–(4) в виде: $\widetilde{s}^{(1)}(t)$; $\widetilde{\psi}^{(1)}(t)$; $\widetilde{w}^{(1)}(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f^{(1)}]$, а также $t_f^{(1)}$ и значение функционала (1):

$$J_\beta^{(1)} = \int_{t_0}^{t_f} \Big[F(t, \widetilde{s}^{(1)}(t), \widetilde{w}^{(1)}(t))\widetilde{w}^{(1)}(t) + \beta(\widetilde{w}^{(1)}(t) - w^*(\cdot))^2\Big]\, dt.$$

При этом также получим значение гамильтониана (6) как функцию $\psi_0^{(1)}$ (и, вообще говоря, β):

$$H(t_f^{(1)}, s_f, \widetilde{w}^{(1)}(t_f^{(1)}), \widetilde{\psi}^{(1)}(t_f^{(1)})) = \Delta_\beta(\psi_0^{(1)}).$$

Очевидно, что в общем случае имеет место $\Delta_\beta(\psi_0^{(1)}) \neq 0$. Поэтому далее решение краевой задачи сводится, в конечном счете, к решению уравнения $\Delta_\beta(\psi_0) = 0$ с помощью какого-либо известного численного метода [3]. В итоге будет построена последовательность $\psi_0^{(k)}$; $\widetilde{w}^{(k)}(t)$ $(\forall t \in [t_0, t_f^{(k)}])$), $k = 1, 2, \ldots$, где $\widetilde{\psi}_0^{(k)}$ — k-е приближение для начального значения сопряженной переменной, $\widetilde{w}_0^{(k)}(t)$ — k-е приближение для искомого оптимального управления (7), а $t_f^{(k)}$ — аналогичное приближение для t_f. При этом последовательность $\widetilde{W}^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится к искомому оптимальному управлению (7), а последовательность $J_\beta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — к минимуму функционала задачи (1), что подтверждается результатами моделирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08–08–99116.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горелов Ю. Н.* Об оптимальном сканировании маршрутов съемки на поверхности Земли космическими средствами дистанционного зондирования. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 1, с. 141–142.
2. *Горелов Ю. Н.*, *Пермяков А. В.* Параметрическая оптимизация законов сканировании маршрутов съемки космическими средствами дистанционного зондирования. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 635–637.
3. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1974, 528 с.