З. И. Б е ж а е в а, **В. И. О с е л е д е ц** (Москва, МИЭМ, АБИК). **Энтропия мер Эрдёша.**

Слово в алфавите $\{0,1,2,\dots,m-1\}$ назовем *допустимым*, если все его подслова длины 2 имеют вид $\{0i,\ 0\leqslant i\leqslant m-1,\ i(i-1),\ 1\leqslant i\leqslant m-1\}$. Рассмотрим марковское множество X всех допустимых бесконечных слов $x_1x_2\dots$.

Пусть $0<q<1$, $p=1-q$. Зададим матрицы M_0, M_1 размера $m\times m$, определив их ненулевые элементы:

$$M_0(1,1)=q,\quad M_0(2,1)=p,\quad M_0(2,m+1)=q,\quad M_0(i,i-1)=p,\quad 3\leqslant i\leqslant m,$$

$$M_1(1,1)=p,\quad M_1(1,m+1)=q,\quad M_1(2,m+1)=p\quad (p=1-q).$$

Определим матрицы

$$M(0,0)=M_0,\quad M(0,j)=M_1,\quad 1\leqslant j\leqslant m-1,$$

$$M(1,0)=M_0,\quad M(j,j-1)=M_1,\quad 2\leqslant j\leqslant m-1.$$

Пусть ненулевые столбцы $r(i)$, $0\leqslant i\leqslant m-1$, длины $m+1$ удовлетворяют уравнению $\sum_j M(i,j)r(j)=r(i)$, а ненулевые строки $l(i)$, $0\leqslant i\leqslant m-1$, длины $m+1$ удовлетворяют уравнению $\sum_i l(i)M(i,j)=l(j)$.

Определим меру Эрдёша на X формулой

$$\mu(\{x\colon\ x_1x_2\dots x_n=a_1a_2\dots a_n\})=\mu(a_1a_2\dots a_n)\\ =\frac{l(a_1)M(a_1,a_2)\dots M(a_{n-1},a_n)r(a_n)}{lr},\quad \mu(a_1)=\frac{l(a_1)r(a_1)}{lr}.$$

Таким образом, мы имеем двухпараметрическое семейство мер Эрдёша с параметрами q и $m\geqslant 2$.

Пусть h — энтропия меры Эрдёша. Теперь введем матрицы второго порядка $w(0),w(1)$:

$$w(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ p^{m-1}/q^{m-1} & p^{m-1}/q^{m-1}\end{pmatrix},\quad w(1)=\begin{pmatrix} p/q & p/q\\ 0 & p^m/q^m\end{pmatrix}.$$

Положим $w(d)=w(d_1)w(d_2)\dots w(d_n)$ по всем 0-1 словам $d=d_1d_2\dots d_n$. Для пустого слова $(n=0)$ положим $w(\varnothing)=Id$. Пусть D_n — множество слов 0-1 длины n и

$$k_n^1=\sum_{d\in D_n}(1,1)w(d)\biggl(1,\frac{p^{m-1}}{q^{m-1}}\biggr)^T,\quad k_n^2=\sum_{d\in D_n}(1,1)w(d)(1,0)^T.$$

Для энтропии Эрдёша h нами доказана следующая формула:

$$h=-c_{01}\ln q-c_{02}\ln\frac{p}{q}-c_1\Sigma_1-c_2\Sigma_2,$$

где

$$c_{01}=\frac{(1-p^m)(1-qp^{m-1})(1-q^m)}{p^mq^m-pq^m+pq-qp^m-q^{m+1}p^{m+1}},$$
$$c_{02}=\frac{(mp^mq-mp^mq^{m+1}+p-p^{m+1})(1-2q^m+q^{m+1})}{pq-qp^m+q^mp^m(p^2+pq+q^2)},$$

$c_1=p(1-p^{m-1})q^{m-1}$, $c_2=(p^2-p^m)q^{m-2}+(1-p^{m-1})(1-q^{m-2})$, $\Sigma_1=\sum_{n=0}^\infty k_n^1q^{mn}$, $\Sigma_2=\sum_{n=0}^\infty k_n^2q^{mn}$.

Если $q=1/2$, то $\Sigma_1=(2^m-1)\Sigma_2$ и наша формула совпадает с формулой из [2] для энтропии Гарсиа меры Эрдёша.

Для $m = 2$, $q = 1/2$ эта формула для энтропии Гарсиа была получена в [1].

При любом q сумма Σ_2 выражается через Σ_1. Ряд Σ_1 сходится слишком медленно. Мы нашли способ ускорения сходимости, аналогичный способу из [1]. Это позволяет вычислить энтропию с точностью 15 знаков после запятой для любых значений параметров m, q.

Работа второго автора частично поддержана грантом РФФИ № 07–01–92215–НЦНИЛ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alexander I. C.*, *Zagier D.* The entropy of certain infinitely convolved Bernoulli measure. — J. London Math. Soc., 1991, v. 44, p. 121–134.
2. *Grabner P. J.*, *Kirrschenhofer P.*, *Tichy R. F.* Combinatorial and arithmetical properties of linear numeration systems. — Combinatorica, 2002, v. 22, № 2, p. 245–267.