И. А. К о б я к о в а (Москва, ЦЭМИ РАН). **Асимптотическое распределение экстремумов, индуцированных распределением** $WAK(5)$**.**

$WAK(5)$ — это пятипараметрическое семейство распределений, успешно применяемых при исследовании гидрологических процессов (например, наводнений) [1], [2], экономических процессов [3] и др. Функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ, относящейся к семейству $WAK(5)$, задается неявно формулой

$$x = m + a\Big[1 - (1 - F(x))^b\Big] - c\Big[1 - (1 - F(x))^{-d}\Big], \tag{1}$$

где a, b, c, d, m — параметры распределения. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин из семейства (1). Обозначим M_n максимум первых n из этих величин, т. е. $M_n = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

Нас будет интересовать асимптотическое распределение случайной величины M_n при $n \to \infty$. В «классической» теории экстремальных значений функция распределения величины M_n легко выписывается: $\mathbf{P}\{M_n \leqslant x\} = F^n(x)$, но в нашем случае функция $F(x)$ задана неявно (формулой (1)).

Введем обозначение $x_F = \sup\{x\colon\ F(x) < 1\}$. Нас будут интересовать только распределения с $x_F = \infty$. В этом случае случайная величина ξ принимает значения из диапазона $[m, \infty)$ и поставленная задача становится содержательной. Условие $x_F = \infty$ эквивалентно требованию $c > 0$, $d > 0$.

По теореме об экстремальных типах [4] распределение $WAK(5)$ при $d > 0$ относится к типу II. Чтобы убедиться в этом, вычислим предел $\lim_{x\to\infty} xf(x)/(1 - F(x))$, где $f(x)$ — плотность распределения $WAK(5)$, т. е. $f(x) = F'(x)$. Из формулы (1) по теореме о дифференцировании неявной функции получаем

$$f(x) = \frac{1}{ab(1 - F(x))^{b-1} + cd(1 - F(x))^{-d-1}}.$$

Теперь искомый предел легко находится:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{1 - F(x)} = \lim_{F\to 1} \frac{m + a[1 - (1 - F)^b] - c[1 - (1 - F)^{-d}]}{(1 - F)[ab(1 - F)^{b-1} + cd(1 - F)^{-d-1}]} = \frac{1}{d} < 0.$$

Предельная функция распределения $G(x)$ имеет вид (см. [4])

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \exp\{-x^{-1/d}\}, & x > 0. \end{cases}$$

Для построения нормировочной последовательности воспользуемся формулой (1).

Полагая, что $1 - F(\gamma_n) = 1/n$, получаем $\gamma_n = m + a[1 - n^{-b}] - c[1 - n^d]$. Таким образом, $\mathbf{P}\{M_n/\gamma_n \leqslant x\} \to G(x)$ при $n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Houghton J. C.* The wakeby distribution for modeling flood flows. — Water Resources Res., 1978, v. 14, № 6, p. 1111–1115.
2. *Rao A. R.*, *Hamed K. H.* Flood Frequency Analyses. Boca Raton: CRC Press, 2000.
3. *Кобякова И. А.* Об одном методе моделирования рядов доходности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 5, с. 912–914.
4. *Лидбеттер М.*, *Ротсен Х.*, *Линдгрен Г.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.