А. В. Шмаков (Москва, МГУЛ). **Дифракция акустической волны на цилиндрической поверхности.**

Бесконечно длинный цилиндр окружен идеальной сжимаемой жидкостью. В жидкости распространяется акустическая волна, параметры которой считаются заданными. Используется система уравнений идеальной сжимаемой жидкости, записанная в безразмерном виде в цилиндрической системе координат. В качестве масштабов выбраны следующие величины: $[P] = \rho a^2$, $[V, U] = a$, $[t] = R/a$, $[r] = R$, где ρ — плотность жидкости, a — скорость звука в жидкости, R — радиус цилиндра, P — давление в жидкости; V, U — нормальная и тангенциальная скорость жидкости; r, t, φ — текущий радиус, время, полярный угол. Решение системы уравнений гидродинамики ищем в виде разложения в ряд Фурье по угловой координате:

$$V(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos(n\varphi), \quad U(r,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin(n\varphi), \quad P(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(n\varphi).$$

Система уравнений гидродинамики для n-й гармоники ряда имеет вид

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = -\frac{\partial P_n}{\partial r}, \quad \frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{n}{r} P_n, \quad \frac{\partial^2 P_n}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\left(r \frac{\partial P_n}{\partial r}\right) - n^2 P_n = 0. \tag{1}$$

Система уравнений (1) относительно автомодельной переменной $z = (t+1)/r$ перепишется в виде

$$\frac{dV_n}{dz} = z\frac{dP_n}{dz}, \quad \frac{dU_n}{dz} = nP_n, \quad (z^2-1)\frac{d^2 P_n}{dz^2} + z\frac{dP_n}{dz} - n^2 P_n = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим расходящуюся акустическую волну, распространяющуюся от границы $r = 1$. Уравнение фронта расходящейся волны определяется соотношением $t - r + 1 = 0$. Значениям $z < 1$ соответствуют точки перед фронтом, возмущения в которых равны нулю. Значение $z = 1$ соответствует фронту волны, значение давления и скорости на котором считается равным нулю. Для $z \geqslant 1$ и $n > 1$ решение системы уравнений (2) имеет вид

$$\begin{aligned} &P_n(z) = B_n U_n^*(z), \quad V_n(z) = \frac{B_n}{2}\left(\frac{n}{n-1}U_n^*(z) + \frac{n}{n+1}U_n^*(z)\right), \\ &U_n(z) = \frac{B_n}{2}\left(\frac{n}{n+1}U_n^*(z) - \frac{n}{n-1}U_n^*(z)\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $U_n^* = (1/2)((z+\sqrt{z^2-1})^n - (z-\sqrt{z^2-1})^n)$ — полиномы Чебышева второго рода для $z \geqslant 1$, B_n — коэффициенты интегрирования.

Следуя [2], решение системы (1) для n-й гармоники разложения запишем в виде

$$\begin{aligned} P_n(r,t) &= \int_0^{t-r+1} \omega_{pn}(\tau) U_n^*(\xi_1)\, d\tau, \\ V_n(r,t) &= \int_0^{t-r+1} \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}U_{n+1}^*(\xi_1) + \frac{n}{n-1}U_{n-1}^*(\xi_1)\right) d\tau, \\ U_n(r,t) &= \int_0^{t-r+1} \frac{\omega_{un}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}U_{n+1}^*(\xi_1) - \frac{n}{n-1}U_{n-1}^*(\xi_1)\right) d\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\xi_1 = (t-\tau+1)/r$, $n > 1$.

Неизвестные переходные функции $\omega_{pn}(\tau)$, $\omega_{vn}(\tau)$, $\omega_{un}(\tau)$ связаны между собой зависимостями, которые получаются после подстановки (4) в (1) для n-й гармоники разложения: $\omega_{vn}(\tau) = \omega_{un}(\tau) = -\omega_{pn}(\tau)$.

Для определения переходных функций используется граничное условие. В частности, если цилиндр является жестким, то сумма скоростей падающей и отраженной волн при $r = 1$ равна нулю. Функция $\omega_{un}(\tau)$ определяется из интегральных уравнений для n-й гармоники:

$$\int_0^t \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}U^*_{n+1}(\xi) + \frac{n}{n-1}U^*_{n-1}(\xi)\right) d\tau = -V_n^{\text{пад}}(t),$$

где $\xi = t - \tau + 1$, $V_n^{\text{пад}}(t)$ есть n-я гармоника разложения падающей волны. Общая дифракционная картина определяется как суперпозиция падающей и отраженной волн. Рассмотрена дифракция плоской ступенчатой волны единичной амплитуды на жестком цилиндре. Приведено сравнение с результатами [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мнев Б. Н.*, *Перцев А. К.* Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970.
2. *Шмаков А. В.* Частные автомодельные решения волнового уравнения в задачах гидродинамики. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 4, с. 723–724.