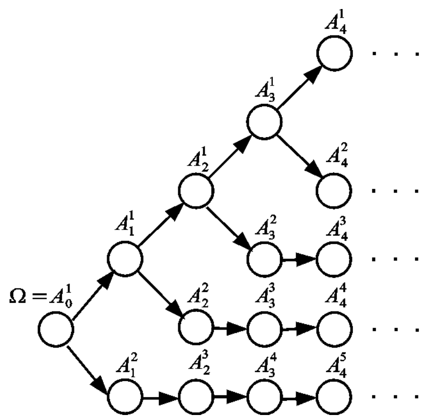
О. В. Назарько (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Критерий существования слабой деформации в случае специальной хааровской фильтрации.**

В работе [1] были получены достаточные условия на процесс плотностей $(h_n)_{n=0}^N$, обеспечивающие существование слабой деформации бинарного стохастического базиса. Настоящий доклад посвящен вопросам существования слабой деформации в случае, когда фильтрация порождается следующим деревом:



Очевидно, что при переходе от момента времени n к моменту времени $n+1$ атом A_n^1 дробится на два атома A_{n+1}^1, A_{n+1}^2, а все остальные атомы остаются неизменными, т. е. $A_n^k = A_{n+1}^{k+1}$. Пусть $\mathcal{F}_n := \sigma\{A_n^1, \dots, A_n^n, A_n^{n+1}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ (где $N \leqslant +\infty$) — строго положительный адаптированный процесс, причем $h_0 = 1$. В настоящем докладе дается ответ на следующий вопрос: когда существует семейство таких вероятностных мер $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{N+1}$, что

$$dQ^{(n+1)} = h_n \, dQ^{(n)}, \qquad n < N+1. \tag{1}$$

Рассмотрим представление с. в. $h_n = \sum_{k=1}^{n+1} h_n^k I_{A_n^k}$. Так как $h_n^k > 0$ ($n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, n+1$), то $q_n^k := Q^{(n)}(A_n^k) > 0$ при тех же n и k. В соответствии с терминологией [1], [2] семейство мер $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{N+1}$ называется *слабой деформацией исходного стохастического базиса.*

Легко проверить, что при $N = 1$ процесс $(h_n)_{n=0}^1$ порождает деформацию $(Q^{(n)})_{n=0}^2$ тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } \min\{h_1^1, h_1^2\} < 1 < \max\{h_1^1, h_1^2\}, \quad \text{либо } h_1^1 = h_1^2 = 1. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть $N \geqslant 2$ есть конечное натуральное число или $+\infty$ и выполняется* (2). *Для того чтобы процесс $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ порождал деформацию $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{N+1}$* (*в смысле* (1)), *необходимо и достаточно, чтобы для всех n: $2 \leqslant n < N+1$ и какого-либо решения $(q_{n-1}^1, q_{n-1}^2, \dots, q_{n-1}^n)$ системы*

$$q_{n-1}^1 + q_{n-1}^1 = h_{n-2}^1 q_{n-2}^1, \quad q_{n-1}^3 = h_{n-2}^2 q_{n-2}^2, \quad \dots, \quad q_{n-1}^n = h_{n-2}^{n-1} q_{n-2}^{n-1},$$

$$\sum_{k=1}^n h_{n-1}^k q_{n-1}^k = 1, \quad q_{n-1}^k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

выполнялось:

$$\begin{aligned} 1 - h_{n-1}^1 q_{n-1}^1 \max\{h_n^1, h_n^2\} &< \sum_{k=2}^n h_{n-1}^k q_{n-1}^k h_n^{k+1} \\ &< 1 - h_{n-1}^1 q_{n-1}^1 \min\{h_n^1, h_n^2\}, \quad \textit{если} \quad h_n^1 \not\equiv h_n^2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\sum_{k=3}^{n+1} q_{n-1}^{k-1} h_{n-1}^{k-1} h_n^k = 1 - q_{n-1}^1 h_{n-1}^1 h_n^1, \quad \textit{если} \;\; h_n^1 = h_n^2. \tag{4}$$

З а м е ч а н и е. Пусть $\min\{h_n^1, h_n^2\} < 1 < \max\{h_n^1, h_n^2\}$ для всех $n < N+1$. Тогда очевидно, что $1 - h_{n-1}^1 q_{n-1}^1 \min\{h_n^1, h_n^2\} > 0$. Если $1 - h_{n-1}^1 q_{n-1}^1 \max\{h_n^1, h_n^2\} \geqslant 0$, то неравенство (3) равносильно неравенству

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{h_{n-1}^k q_{n-1}^k}{1 - h_{n-1}^1 q_{n-1}^1 \min\{h_n^1, h_n^2\}} \, h_n^{k+1} < 1. \tag{5}$$

Вместе с неравенствами $h_n^{k+1} > 0$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$, это неравенство описывает открытый симплекс с вершиной в нуле в пространстве $\mathbf{R}^{n-1}$. Таким образом, точка $(h_n^3, \ldots, h_n^n, h_n^{n+1})$ должна находиться в этом симплексе.

Если $1 - h_{n-1}^1 q_{n-1}^1 \max\{h_n^1, h_n^2\} > 0$, то точка $(h_n^3, \ldots, h_n^n, h_n^{n+1})$ должна находиться в усеченном симплексе, определяемом неравенствами $h_n^{k+1} > 0$ $(k = 2, \ldots, n)$, неравенством (5) и неравенством

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{h_{n-1}^k q_{n-1}^k}{1 - h_{n-1}^1 q_{n-1}^1 \max\{h_n^1, h_n^2\}} \, h_n^{k+1} > 1. \tag{6}$$

В частности, если положить $h_n^{k+1} = 1$ $(k = 2, \ldots, n)$, то как легко убедиться, что неравенства (5) и (6) выполняются.

В заключение отметим, что сильные деформации, т. е. деформации, в которых некоторые из чисел q_n^k обращаются в нуль, были изучены в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назарько О. В.* О существовании и единственности эквивалентных мартингальных деформаций для бинарного (B, S)-рынка на деформированном стохастичеком базисе. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 4, с. 641–643.
2. *Назарько О. В.* (B, S)-рынки на деформированных стохастических базисах. — Известия ВУЗов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки, 2008, № 3, с. 19–21.
3. *Назарько О. В.* Сильные деформации на нерегулярных финансовых рынках относительно специальной хааровской фильтрации. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, с. 267–268.