Е. А. Савинов, С. Я. Шатских (Самара, СамГУ). **Условные квантили устойчивых распределений в гильбертовом пространстве.**

Как известно, не все устойчивые распределения вероятностей имеют математические ожидания. Поэтому при решении многих задач математической статистики вместо условных моментов для таких распределений естественно рассматривать условные медианы и квантили. В настоящем сообщении мы решаем задачу построения условных квантилей для устойчивых эллиптически контурированных распределений в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство $\mathbf{H}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$. Пусть $\mu_\alpha^B\{\cdot\}$ — устойчивая эллиптически контурированная вероятностная мера на $\{\mathbf{H},\mathcal{B}\}$ с характеристическим функционалом $\Psi(y)=\exp\{-\langle Bh,h\rangle^{\alpha/2}\}$, $h\in\mathbf{H}$, где B — линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор и $\alpha\in(0,2]$.

Введем в прстранстве $\mathbf{H}$ новое скалярное произведение и соответствующую норму $|\cdot|_-^2=\langle\cdot,\cdot\rangle_-:=\langle B\cdot,\cdot\rangle$.

Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — произвольный ортонормированный (относительно исходного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$) базис в пространстве $\mathbf{H}$, минимальный относительно введенной нормы. Это означает, что любой элемент f_i не принадлежит замыканию (по норме $|\cdot|_-$) линейной оболочки всех остальных элементов этого базиса (см. [1]).

Рассматривая линейные функционалы $f_j(h):=\langle f_j,h\rangle$ ($h\in\mathbf{H}$, $j=1,2,\dots$) в качестве случайных величин, введем наименьшую σ-алгебру $\mathcal{B}_{ni}$ подмножеств пространства $\mathbf{H}$, относительно которой измеримы все те $f_j(h)$, у которых $j\neq i$.

В следующей теореме мы даем формулу для условного распределения случайной величины $f_i(h)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_{ni}$.

Теорема. *Для любого минимального* (*относительно нормы* $|\cdot|_-$) *ортонормированного базиса* $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *пространства* $\mathbf{H}$ *имеет место равенство*

$$\mu_\alpha^B\{f_i(h)\leqslant x|\mathcal{B}_{ni}\}=\Phi\biggl(\frac{x-m_i^{(2)}(h)}{s_\infty(h)\,|f_i-f_i^*|_-}\biggr),$$

где $m_i^{(2)}(h)=\mathbf{M}_2\{f_i(h)|\mathcal{B}_{ni}\}$ *есть условное математическое ожидание* $f_i(h)$ *относительно гауссовской меры* $\mu_2^B\{\cdot\}$; f_i^* — *проекция* (*относительного скалярного произведения* $\langle\cdot,\cdot\rangle_-$) *элемента* f_i *на замыкание* (*по норме* $|\cdot|_-$) *линейной оболочки всех остальных элементов базиса*; $s_\infty^2(h):=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\langle(\pi_nB\pi_n)^{-1}\pi_nh,\pi_nh\rangle$, *где* π_n — *семейство* $\langle\cdot,\cdot\rangle$-*ортопроекторов пространства* $\mathbf{H}$ *на подпространства* $\mathbf{H}_n:=\operatorname{span}\{f_1,\dots,f_n\}$, $n=1,2,\dots$; $\Phi(\cdot)$ —*стандартное гауссовское распределение на* $\mathbf{R}^1$.

Доказанная теорема позволяет определить условную квантиль $q_{i|\mathcal{B}_{ni}}^{(p)}(h)$ случайной величины $f_i(h)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_{ni}$ посредством следующего равенства:

$$\Phi\biggl(\frac{q_{i|\mathcal{B}_{ni}}^{(p)}(h)-m_i^{(2)}(h)}{s_\infty(h)\,|f_i-f_i^*|_-}\biggr)=p,\qquad p\in(0,1).$$

Таким образом, $q_{i|\mathcal{B}_{ni}}^{(p)}(h)=m_i^{(2)}(h)+s_\infty(h)|f_i-f_i^*|_-\Phi^{-1}(p)$. В частности, для условной медианы $p=1/2$, $\Phi^{-1}(1/2)=0$ и $q_{i|\mathcal{B}_{ni}}^{(1/2)}(h)=m_i^{(2)}(h)$.

В том случае, когда базис $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ состоит из собственных векторов оператора B: $Bf_n=\lambda_n^2f_n$, $n=1,2,\dots$, выполняются равенства $m_i^{(2)}(h)=0$, $|f_i|_-=\lambda_i$, $f_i^*=0$, $q_{i|\mathcal{B}_{ni}}^{(p)}(h)=s_\infty(h)\lambda_i\Phi^{-1}(p)$.

Замечание. В работе [2] дано представление условного математического ожидания $m_i^{(2)}(h)$ на основе аффинных измеримых функционалов в пространстве

$\{\mathbf{H}, \mathcal{B}, \mu_2^B\}$. Более подробное описание свойств случайной величины $s_\infty^2(h)$ приведено в статье [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
2. *Shatskikh S. Ya.* Conditional quantiles of Gaussian measures in Hilbert space. — J. Math. Sci., 1998, v. 89, № 5, p. 1553–1558.
3. *Шатских С. Я.* Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 292–311.