Г. И. Белявский, Н. В. Данилова (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Об одном методе вычисления капитала портфеля для модифицированной модели (B, S)-рынка.**

Рассматривается модель (B, S)-рынка, в котором рисковый актив удовлетворяет стохастическому разностному уравнению

$$\Delta S_n = S_{n-1}(\mu_n + \sigma_n \varepsilon_n) \quad \text{или} \quad S_n = S_{n-1}(1 + \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n).$$

Считаем, что $\sigma_n \in F_{n-1}$, $\mu_n \in F_{n-1}$. В данном случае $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ — независимые случайные величины, причем $\mathbf{P}\{\varepsilon_n = 1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n = -1\}$. Рассматривается естественная фильтрация $F_0 = \sigma(\varnothing, \Omega)$, $F_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Параметр σ естественно назвать *волатильностью*, а параметр μ — *сносом*.

Формула для величины банковского счета имеет вид $B_n \equiv 1$.

Ограничения на параметры модели:

$$\max\{-\sigma_n, \sigma_n - 1\} < \mu_n < \sigma_n. \tag{1}$$

Процесс плотности Z_n ($dP_n^* = Z_n\, dP_n$, P^* — риск-нейтральная мера) удовлетворяет уравнению $Z_n = Z_{n-1}(1 - \mu_n \varepsilon_n / \sigma_n)$.

Пусть $(X_n)_{n=0}^N$ — процесс, отражающий капитал оптимального портфеля в моменты времени $n = 0, 1, \ldots, N$. Значения X_n можно определить из следующей краевой задачи:

$$X_{n-1} = \mathbf{E}\,(X_n V_n | F_{n-1}), \quad X_N = f_N. \tag{2}$$

Здесь $V_n = Z_n / Z_{n-1} = 1 - \mu_n \varepsilon_n / \sigma_n$.

Покажем, что капитал портфеля может быть представлен в виде

$$X_n = X_{n-1}(1 + \alpha_n + \delta_n \varepsilon_n) \quad \text{или} \quad \Delta X_n = X_{n-1}(\alpha_n + \delta_n \varepsilon_n). \tag{3}$$

Подставим значение X_n в первое уравнение системы (2) и получим:

$$\alpha_n = \delta_n \frac{\mu_n}{\sigma_n}. \tag{4}$$

Следовательно, капитал портфеля имеет вид:

$$\Delta X_n = \frac{X_{n-1}}{S_{n-1}} \frac{\delta_n}{\sigma_n} \Delta S_n. \tag{5}$$

Замечание. В силу формулы (5) также доказана S-представимость [1, с. 611].

Вычислим число единиц рискового актива. Имеем: $\gamma_n = \Delta X_n / \Delta S_n = X_{n-1}\delta_n / (S_{n-1}\sigma_n)$.

В силу того, что $\alpha_n, \delta_n \in F_{n-1}$, имеем $\gamma_n \in F_{n-1}$.Также отметим, что $\gamma_n|_{\varepsilon_n = 1} = \gamma_n|_{\varepsilon_n = -1}$. Следовательно, задача (2) имеет вид

$$\Delta X_n = X_{n-1} \frac{\delta_n}{\sigma_n}(\mu_n + \sigma_n \varepsilon_n), \quad X_N = f_N. \tag{6}$$

Найдем ограничения на δ_n. Параметры α_n, δ_n подчиняются естественным ограничениям: $1 + \alpha_n + \delta_n > 0$, $1 + \alpha_n - \delta_n > 0$. Следовательно, $-1/(\mu_n/\sigma_n + 1) < \delta_n < -1/(\mu_n/\sigma_n - 1)$. Здесь мы учли то, что $\sigma_n > 0$, а также неравенства (1).

Рассмотрим марковскую платежную функцию $f_N = f(S_N)$.

Вычислим значения δ_n из краевого условия — второго уравнения системы (6). Имеем:

$$\begin{aligned}
&X_{N-1}(1+\delta_N(\varepsilon_N+\mu_N/\sigma_N)) = f(S_{N-1}(1+\mu_N+\sigma_N\varepsilon_N));\\
&\varepsilon_N = 1 \ \Rightarrow\ X_{N-1}(1+\delta_N(1+\mu_N/\sigma_N)) = f(S_{N-1}(1+\mu_N+\sigma_N));\\
&\varepsilon_N = -1 \ \Rightarrow\ X_{N-1}(1+\delta_N(-1+\mu_N/\sigma_N)) = f(S_{N-1}(1+\mu_N-\sigma_N)).
\end{aligned}$$

Получилась система двух уравнений с двумя неизвестными: δ_N, X_{N-1}. Вычислим их:

$$\delta_N = \frac{\sigma_N(f(S_{N-1}(1+\mu_N+\sigma_N))-f(S_{N-1}(1+\mu_N-\sigma_N)))}{(\mu_N+\sigma_N)f(S_{N-1}(1+\mu_N-\sigma_N))-(\mu_N-\sigma_N)f(S_{N-1}(1+\mu_N+\sigma_N))},$$

$$X_{N-1} = \frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{\mu_N}{\sigma_N}\Big)f(S_{N-1}(1+\mu_N-\sigma_N)) + \Big(1-\frac{\mu_N}{\sigma_N}\Big)f(S_{N-1}(1+\mu_N+\sigma_N))\Big).$$

Положим $X_n = g_n(S_n)$, $X_N = g_N(S_N) = f(S_N)$. Тогда в общем виде (при переходе от момента времени n к моменту времени $n-1$) формулы для вычисления δ_n, $g_{n-1}(S_{n-1})$ имеют вид:

$$\delta_n = \frac{\sigma_n(g_n(S_{n-1}(1+\mu_n+\sigma_n)) - g_n(S_{n-1}(1+\mu_n-\sigma_n)))}{(\mu_n+\sigma_n)g_n(S_{n-1}(1+\mu_n-\sigma_n)) - (\mu_n-\sigma_n)g_n(S_{n-1}(1+\mu_n+\sigma_n))}, \qquad (7)$$

$$g_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{\mu_n}{\sigma_n}\Big)g_n(S_{n-1}(1+\mu_n-\sigma_n))+\Big(1-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\Big)g_n(S_{n-1}(1+\mu_n+\sigma_n))\Big).$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема. *Капитал портфеля может быть представлен в виде* (3), *где параметры* α_n, δ_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, *вычисляются по формулам* (7) *и* (4) *для марковского финансового обязательства. Данный капитал является решением задачи* (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: ФАЗИС, 1998.
2. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
3. *Мельников А. В.* Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997, 126 с.
4. *Мельников А. В.*, *Волков С. Н.*, *Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001, 260 с.
5. *Булинский А. В.*, *Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003, 400 с.