П. А. Иванников, Е. В. Филаткина (Ульяновск, УлГУ). **Об устойчивости дискретной системы с неограниченным последействием.**

Пусть $\mathbf{R}^n$ — n-мерное пространство с нормой $|\mathbf{x}|$, B — банахово пространство последовательностей φ: $\mathbf{Z}^- \to \mathbf{R}^n$ с некоторой нормой $\|\varphi\|$. Для функции x: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^n$ и каждого $n \in \mathbf{Z}$ будем определять функцию $\mathbf{x}_n$: $\mathbf{Z}^- \to \mathbf{R}^n$ равенством $\mathbf{x}_n(k) = \mathbf{x}(n+k)$, $k \in Z^-$.

Будем считать пространство B *допустимым*, что означает [1], [2]: существуют такие постоянные $p > 0$, $q > 0$ и функция m: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+$, $m(n) \to 0$ при $n \to \infty$, что для каждой ограниченной функции $\mathbf{x}$: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{x}_{n_0} \in B$, при всех $n \geqslant n_0$ выполняются условия:

$$\mathbf{x}_n \in B, \quad \|\mathbf{x}_n\|_B \leqslant p \max\{|\mathbf{x}(k)|,\, n_0 \leqslant k \leqslant n\} + m(n-n_0)\|\mathbf{x}_{n_0}\|_B,$$

$$|\varphi(0)| \leqslant q\|\varphi\|_B \quad \text{для любого} \quad \varphi \in B.$$

Рассматривается разностное уравнение с запаздыванием

$$\mathbf{x}(n+1) = f(n, \mathbf{x}_n), \tag{1}$$

где f: $\mathbf{Z}^+ \times B \to \mathbf{R}^n$ есть непрерывное по $\varphi \in B$ при каждом $n \in \mathbf{Z}^+$ отображение, ограниченное на множестве $\mathbf{Z}^+ \times B_H$, $B_H = \{\varphi \in B\colon\ \|\varphi\| \leqslant H_0\}$, равномерно непрерывное на $\mathbf{Z}^+ \times K$, K — компактное множество в B.

Допустим, что для уравнения (1) может быть найден функционал Ляпунова V: $\mathbf{Z}^+ \times B \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющий на каждом решении $\mathbf{x} = \mathbf{x}(n, n_0, \mathbf{x}_{n_0})$ уравнения (1) неравенству

$$V(n+1, \mathbf{x}_{n+1}) \leqslant g(n, V(n, \mathbf{x}_n)) - W(n, \mathbf{x}_n, V(n, \mathbf{x}_n)), \tag{2}$$

где g: $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $g = g(n,u)$ есть функция, не убывающая по $u \in \mathbf{R}^+$ при фиксированном $n \in \mathbf{Z}^+$, функции V, g, W удовлетворяют условиям, аналогичным тем, что и для функции f.

Отсюда следует, что согласно (2) можно ввести уравнение сравнения

$$u(n+1) = g(n, u(n)), \tag{3}$$

при этом функционал $V = V(n, \varphi)$ можно определить как функцию сравнения, а уравнение (3) — как уравнение сравнения.

Допустим, что решение $u = u(n, n_0, u_0)$ уравнения (3) удовлетворяет условию $\inf \lim_{t\to+\infty} \partial u(n, n_0, u_0)/\partial u_0 \geqslant 1$. Обозначим $\omega^+(n_0, \varphi_0)$ положительное предельное множество процесса $\mathbf{x} = \mathbf{x}(n, n_0, \varphi_0)$.

Теорема. *Предположим, что*: 1) *существует функция* V, *удовлетворяющая соотношению* (2); 2) *процесс* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(n, n_0, \varphi_0)$ *системы* (1) *и решение* $u = u(n, n_0, u_0)$, $u_0 = V(n_0, \varphi_0)$, *равномерно ограниченны.*

Тогда для любой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+$ *найдется такой набор предельных функций* (f^*, V^*, g^*, u^*), *что предельный процесс* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(n, \mathbf{p})$, $\mathbf{x}^*(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$, *удовлетворяет одновременно соотношениям* $\mathbf{x}^*(n, \mathbf{p}) \in \omega^+(n_0, \varphi_0)$ *и* $\mathbf{x}^*(n, \mathbf{p}) \in \{V^*(n, \varphi) = u^*(n)\} \cap \{W^*(n, \varphi, u^*(n)) = 0\}$ *для всех* $n \in \mathbf{Z}$, *где* $u^*(n)$, $u^*(0) = V^*(0, \mathbf{p})$ *есть решение предельного уравнения сравнения* $u(n+1) = g^*(n, u(n))$.

Доказанная теорема обобщает результаты целого ряда работ [2]–[6]. На ее основе исследуются различные задачи численного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов А. Ю.* Фазовое пространство при исследовании устойчивости дискретных систем с неограниченным последействием. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 3, с. 470–472.
2. *Богданов А. Ю.* Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления. Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2008, 262 с.
3. *Колмановский В. Б.*, *Родионов А. М.* Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра. — Автомат. телемех., 1995, № 2, с. 3–13.
4. *Колмановский В. Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра. — Автомат. телемех., 1995, № 11, с. 50–64.
5. *Колмановский В. Б.* Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра. — Докл. Академии наук, 1996, т. 349, № 5, с. 610–614.
6. *Колмановский В. Б.*, *Косарева Н. П.* О свойствах решений некоторых разностных систем с переменными коэффициентами. — Дифф. уравнения, 2000, т. 36, № 11, с. 1554–1559.
7. *Haddock J.*, *Terjeki J.* On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay. — J. Diff. Equations, 1990, v. 86, p. 1–32.