А. А. Г у щ и н (Москва, МИАН). **Одна лемма из теории пространств Орлича.**

Пусть $\Phi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ — четная выпуклая функция, $\Phi(0)=0$, $\Phi\not\equiv 0$, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Рассматривается пространство Орлича $L=L^\Phi(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ (классов эквивалентности относительно равенства $\mathbf{P}$-п. н.) действительных случайных величин (с.в.). Напомним необходимые определения и факты (см. [1], [2]). Тогда пространство $L=\{$с. в. $\xi\colon \mathbf{E}\,\Phi(\alpha\xi)<\infty$ для некоторого $\alpha>0\}$ является банаховым относительно нормы $\|\xi\|_{(\Phi)}=\inf\{\alpha>0\colon \mathbf{E}\,\Phi(\xi/\alpha)\leqslant 1\}$. Замыкание пространства $L^\infty=L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ в L есть $M=\{$с. в. $\xi\colon \mathbf{E}\,\Phi(\alpha\xi)<\infty$ для любого $\alpha>0\}$.

Если Φ удовлетворяет Δ_2-условию, т.е. $\lim\sup_{x\uparrow\infty}\Phi(2x)/\Phi(x)<\infty$, то $M=L$; в противном случае (что и предполагается в дальнейшем) вложение $M\subseteq L$, вообще говоря, является собственным. Любой непрерывный линейный функционал $z\in L^*$ на L допускает единственное разложение $z=z_r+z_s$ на регулярный функционал $z_r\in L_r^*$ и сингулярный функционал $z_s\in L_s^*$. При этом существует взаимно-однозначное соответствие $z\leftrightsquigarrow\eta_z$ между регулярными функционалами $z\in L_r^*$ и с.в. $\eta_z\in L^\Psi(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, задаваемое формулой $z(\xi)=\mathbf{E}\,\xi\eta_z$, где $\Psi(y)=\sup_{x\in\mathbf{R}}[xy-\Phi(x)]$ — дополнительная к Φ функция; $L_s^*=\{z\in L^*\colon z(\xi)=0$ для любой $\xi\in M\}$, и для неотрицательного сингулярного линейного функционала z

$$\|z\|=\sup\{z(\xi)\colon \xi\geqslant 0,\ \xi\in L,\ \mathbf{E}\,\Phi(\xi)<\infty\}, \qquad (1)$$

см. [2, предложение IV.3.4].

Лемма. *Пусть K — выпуклый конус в L, $K^0=\{z\in L^*\colon z(\xi)\leqslant 0$ для любой $\xi\in K\}$, $\overline{z}\in L^*$. Тогда*

$$\min\{\|z\|\colon z\in L_s^*,\ z\geqslant 0,\ \overline{z}+z\in K^0\}=\sup_{\xi\in K,\ \mathbf{E}\,\Phi(\xi^-)<\infty}\overline{z}(\xi) \qquad (\min\varnothing=+\infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим δ_A выпуклый индикатор множества A (0 на A и $+\infty$ вне A). Положим $\chi(\xi)=\inf\{\alpha>0\colon \mathbf{E}\,\Phi(\xi^-/\alpha)<\infty\}$, $\xi\in L$. Легко проверить, что функция χ выпукла и непрерывна, а ее преобразование Фенхеля $\chi^*(z)=\sup_{\xi\in L}[z(\xi)-\chi(z)]$, $z\in L^*$, удовлетворяет $\chi^*=\delta_{-B}$, где $B=\{z\in L_s^*\colon z\geqslant 0$, $\|z\|\leqslant 1\}$. Отсюда по теореме Фенхеля–Рокафеллара $(\delta_K+r\chi)^*=\delta_{K^0-rB}$ для любого $r>0$, что эквивалентно утверждению леммы.

Работа, представленная данным сообщением, мотивирована теоремой 21 в статье С. Бьяджини и М. Фриттелли [3], в которой для изучаемой ими целевой функции получено следующее выражение (в наших обозначениях):

$$\min_{\lambda>0,\,z\in K^0,\,z(1_\Omega)=1}\{\lambda(x+\|z_s\|)+\mathbf{E}\,\Phi(\lambda\eta_{z_r})\}, \qquad (2)$$

где конус K содержит отрицательный конус в L. Очевидно, в этом случае K^0 состоит из неотрицательных функционалов, а условие $z(1_\Omega)=1$ означает, что $\mathbf{E}\,\eta_{z_r}=1$. Поэтому величину (2) в силу нашей леммы можно переписать в виде

$$\min_{\lambda>0,\,\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{\lambda(x+a(\mathbf{Q}))+\mathbf{E}\,\Phi\left(\lambda\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)\right\},$$

где $\mathcal{Q}=\{\mathbf{Q}$ — вероятностная мера: $\mathbf{Q}\ll\mathbf{P}$, $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}\in L^\Psi(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, $a(\mathbf{Q})<\infty\}$, $a(\mathbf{Q})=\sup_{\xi\in K,\,\mathbf{E}\,\Phi(\xi^-)<\infty}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\xi$.

Работа частично поддержана РФФИ, проект № 08–01–00740.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А.*, *Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Rao M. M.*, *Ren Z. D.* Theory of Orlicz Spaces. New York: Dekker, 1991.
3. *Biadgini S.*, *Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach. — Ann. Appl. Probab., 2008, v. 18, No 3, p. 929–966.