В. Л. К р е п с (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Модель биржевых торгов. Статический случай.**

Мы исследуем модель одношаговых торгов, которая является частным случаем рассмотренной в [1] и [2] модели многошаговых торгов с асимметричной информированностью участников. В модели два биржевых игрока обладают деньгами и однотипными акциями. Истинная цена акции (высокая или низкая) определяется «состоянием природы» $s \in \{L, H\}$ и равна целому положительному m в состоянии H и нулю в состоянии L. Перед началом торгов случайный ход выбирает «состояние природы» H с вероятностью p или L с вероятностью $1-p$. Оба игрока знают вероятность p. «Состояние природы» сообщается игроку 1 (инсайдеру) и не сообщается игроку 2. Игрок 2 знает об информированности игрока 1. Игроки одновременно делают ставки — называют свои цены одной акции. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Если игроки назвали одинаковые ставки, то ничего не происходит. Оба игрока стремятся максимизировать математическое ожидание итога сделки.

Эта модель сводится к антагонистической игре с неполной информацией у второго игрока, в которой выигрыши инсайдера задаются двумя функциями выигрыша, соответствующими двум исходам случайного хода.

Очевидно, что в случае одношагового (неповторяющегося) торга при низкой цене акции инсайдеру следует делать ставку 0 при любой вероятности p. Задача состоит в нахождении оптимального поведения игрока 1 (инсайдера) при высокой цене акции и оптимального поведения игрока 2, не имеющего информации о выбранной случайном цене акции.

Мы рассматриваем два варианта модели. В первом варианте игроки могут делать произвольные ставки, во втором более реалистичном варианте игроки могут назначать только дискретные ставки, пропорциональные минимальной денежной единице, которая полагается равной 1.

Теорема 1. *Пусть допустимы произвольные ставки. Тогда значение игры* (*гарантированный выигрыш инсайдера*) *равно* $m\,p(1-p)$. *В состоянии* H *оптимальная стратегия игрока* 1 *предписывает рандомизацию действий в соответствии с зависящей от* p *функцией распределения на отрезке* $[0, m]$

$$F_p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-p)(\sqrt{m}-\sqrt{m-x})}{p\sqrt{m-x}}, & \text{при } x \leqslant m(1-(1-p)^2), \\ 1, & \text{при } x > m(1-(1-p)^2). \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока 2 *предписывает рандомизацию действий в соответствии с функцией распределения*

$$G_p^*(y) = \begin{cases} \dfrac{(1-p)\sqrt{m}}{\sqrt{m-y}}, & \text{при } y \leqslant m(1-(1-p)^2), \\ 1, & \text{при } y > m(1-(1-p)^2). \end{cases}$$

При вероятностях p, принадлежащих некоторому конечному, зависящему от m множеству, полученное в теореме 1 решение для игры торга с произвольными ставками удается трансформировать в решение игры торга с дискретными ставками.

Отметим, что в случае допустимых дискретных ставок нетрудно видеть, что ставка, равная m, оказывается неэффективной.

Определим множество $P^m = \{p_1^m, p_2^m, \dots, p_{m-1}^m\}$ соотношениями $1 - p_1^m = (m-1)/m$, $1 - p_2^m = (m-2)/(m-1)$ и далее согласно рекуррентному правилу $1 - p_j^m = (1 - p_{j-2}^m)\,(m-j)/(m-j+1)$. Определим множество $Q^m = \{q_1^m, q_2^m, \dots, q_{(m-1)}^m\}$ соотношениями $1 - q_1^m = 1/m$, $1 - q_2^m = 1/(m-1)$ и далее согласно правилу $1 - q_j^m = (m\,(1 - p_{j-1}^m))^{-1}$.

Теорема 2. *Для $p \in P^m \cup Q^m$ значения $V^m(p)$ одношаговых игр торга с дискретными ставками и одношаговых игр торга с произвольными ставками совпадают. Точки $p \in P^m \cup Q^m$ являются точками излома кусочно-линейной функции $V^m(p)$.*

В состоянии H при $p = p_1^m$ оптимальная стратегия игрока 1 — выбор действия (ставки) 1; при $p = p_k^m$, $k = 2, \ldots, m-1$ оптимальная стратегия игрока 1 предписывает рандомизацию действий $\{1, \ldots, k\}$; при $p = q_1^m$ оптимальная стратегия игрока 1 — выбор действия (ставки) $m-1$; при $p = q_k^m$, $k = 2, \ldots, m-1$ она предписывает рандомизацию действий $\{1, \ldots, k-1, m-1\}$.

Оптимальная стратегия игрока 2 при $p = p_k^m$, $k = 1, \ldots, m-1$ предписывает рандомизацию действий $\{0, 1, \ldots, k\}$; при $p = q_k^m$, $k = 1, \ldots, m-1$ она предписывает рандомизацию действий $\{0, 1, \ldots, k-1, m-1\}$.

Следствие. *При $m \to \infty$ множество $P^m \cup Q^m$ становится всюду плотным на отрезке $[0, 1]$. Таким образом, имеет место равенство $\lim_{m\to\infty} V^m(p) = m\,p(1-p)$.*

Исследование проводилось при поддержке РФФИ, проект № 07–06–00174а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Meyer B.*, *Saley H.* On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance. — Int. J. of Game Theory, 2002, v. 31, p. 285–319.
2. *Доманский В.К.*, *Крепс В.Л.* Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов. — Обозр. прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 399–416.