Э. Л. П р е с м а н (Москва, ЦЭМИ РАН)**. Сведение одной двумерной задачи оптимальной остановки к одномерной.**

Пусть w_{1t}, w_{2t} — независимые стандартные винеровские процессы, $w_{10} = w_{20} = 0$, $\mathcal{T}$ — совокупность всех моментов остановки (м.о.) τ относительно потока σ-алгебр, порожденного процессами w_{1t}, w_{2t}. Пусть

$$\xi_{it} = x_i \exp\left\{\left(\alpha_i - \frac{\sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2}{2}\right)t + \sigma_{i1}w_{1t} + \sigma_{i2}w_{2t}\right\}, \tag{1}$$

$x_i > 0$, $i = 1, 2$, а $g(x, y)$ — положительно однородная функция степени $m \geqslant 0$, т. е.

$$g(x, y) = y^m g(x/y, 1). \tag{2}$$

Для иллюстрации вариационного подхода к решению задач оптимальной остановки Аркин и Сластников [1] рассматривали задачу нахождения

$$V(x_1, x_2) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbf{E}\,[g(\xi_{1\tau}, \xi_{2\tau})e^{-\rho\tau}] \tag{3}$$

и построения оптимального м. о., доставляющего супремум в (3) в предположении, что параметры и функция $g(\cdot)$ таковы, что $V(x_1, x_2) < \infty$ для всех (x_1, x_2). Мы показываем, что эта задача сводится к одномерной.

В соответствии с (2) положим $\eta_t = \xi_{1t}/\xi_{2t}$, $\zeta_t = \xi_{2t}^m$. Положим $\sigma_i = \sigma_{1i} - \sigma_{2i}$, $i = 1, 2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ и

$$\widetilde{w}_{1t} = \frac{\sigma_1}{\sigma}w_{1t} + \frac{\sigma_2}{\sigma}w_{2t}, \quad \widetilde{w}_{2t} = -\frac{\sigma_2}{\sigma}w_{1t} + \frac{\sigma_1}{\sigma}w_{2t}. \tag{4}$$

Тогда $\widetilde{w}_{1t}$ и $\widetilde{w}_{2t}$ — тоже независимые стандартные винеровские процессы и $w_{1t} = (\sigma_1/\sigma)\widetilde{w}_{1t} - (\sigma_2/\sigma)\widetilde{w}_{2t}$, $w_{2t} = (\sigma_2/\sigma)\widetilde{w}_{1t} + (\sigma_1/\sigma)\widetilde{w}_{2t}$. Отсюда и из (1) и (4) получаем

$$\eta_t = \frac{\xi_{1t}}{\xi_{2t}} = \frac{x_1}{x_2}\exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\widetilde{w}_{1t}\right\}, \quad \zeta_t = x_2^m\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\delta}\eta_t^{\delta}e^{\widetilde{\alpha}t}\exp\left\{-\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}t + \widetilde{\sigma}\widetilde{w}_{2t}\right\}, \tag{5}$$

где

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}{2} + \frac{\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}, \qquad \delta = m\frac{\sigma_1\sigma_{21} + \sigma_2\sigma_{22}}{\sigma^2},$$

$$\widetilde{\sigma} = m\frac{\sigma_1\sigma_{22} - \sigma_2\sigma_{21}}{\sigma}, \qquad \widetilde{\alpha} = m\alpha_2 - m\frac{\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2}{2} + \frac{\widetilde{\sigma}^2 + \delta\sigma^2}{2} - \alpha\delta.$$

Отсюда

$$V(x_1, x_2) = x_2^m\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\delta} W\left(\frac{x_1}{x_2}, 0\right), \quad \text{где} \quad W(v, z) = \sup_{\tau\in\widetilde{\mathcal{T}}} J(\tau, v, z), \tag{6}$$

$\widetilde{\mathcal{T}}$ — совокупность всех м.о. τ относительно потока σ-алгебр, порожденного процессом η_t и независимым винеровским процессом w_t, а

$$J(\tau, v, z) = \mathbf{E}\left[\eta_\tau^{\delta}g(\eta_\tau, 1)e^{(\widetilde{\alpha}-\rho)\tau}\exp\left\{-\frac{\widetilde{\sigma}^2\tau}{2} + \widetilde{\sigma}w_{2\tau}\right\}\middle|\,\eta_0 = v,\ w_0 = z\right]. \tag{7}$$

Очевидно, что $J(\tau, v, z) = e^{\widetilde{\sigma}z}J(\tau_z, v, 0)$, где τ_z — соответствующий момент остановки, а, значит, $W(v, z) = e^{\widetilde{\sigma}z}W(v, 0)$. Подставляя отсюда $W(v, z)$ в уравнение оптимальности, убеждаемся, что $W(v, 0)$ удовлетворяет тому же уравнению оптимальности, что и

$$V(v) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_1} \mathbf{E}_v[\eta_\tau^{\delta}g(\eta_\tau, 1)e^{(\widetilde{\alpha}-\rho)\tau}], \tag{8}$$

где $\mathcal{T}_1$ — совокупность всех м. о. τ относительно потока σ-алгебр, порожденного процессом η_t, а, значит, при сделанных предположениях справедливо равенство $W(v,0) = V(v)$. Таким образом, задача нахождения функции $V(x_1, x_2)$ и соответствующего момента остановки сводится к одномерной задаче оптимальной остановки геометрического броуновского движения η_t, задаваемого формулой (5) с функционалом из (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07–01–00541.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркин В. И., Сластников А. Д.* Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 3, с. 516–533.